Verwaltungs- und Wirtschafts-Akademie

<u>betriebliche Entscheidungslehre</u>

Dr. Martens

Ausgewählte Literatur:

- Bamberg, G./Coenenberg, A.G.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 11. Aufl. 2002
- Berens, W./Delfmann, W.: Quantitative Planung, 3. Aufl. 2002
- Eisenführ, F./Weber, M.: Rationales Entscheiden, 4. Aufl. 2003
- Franke, G./Hax, H.: Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 4. Aufl. 1999
- Hühn, G./Martens, K.: Axiomatische Grundlagen des Bernoulli-Prinzips, in: Das Wirtschaftsstudium (WISU), 26. Jg., S. 306-310
- Laux, H.: Entscheidungstheorie, 5. Aufl. 2003
- Schmidt, R.H./Terberger, E.: Grundzüge der Investitions- und Finanzierungstheorie, 4. Aufl. 1999 (Nachdruck)
- Sieben, G./Schildbach, T.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungstheorie, 4. Aufl. 1994

1. Bedeutung der Entscheidungstheorie

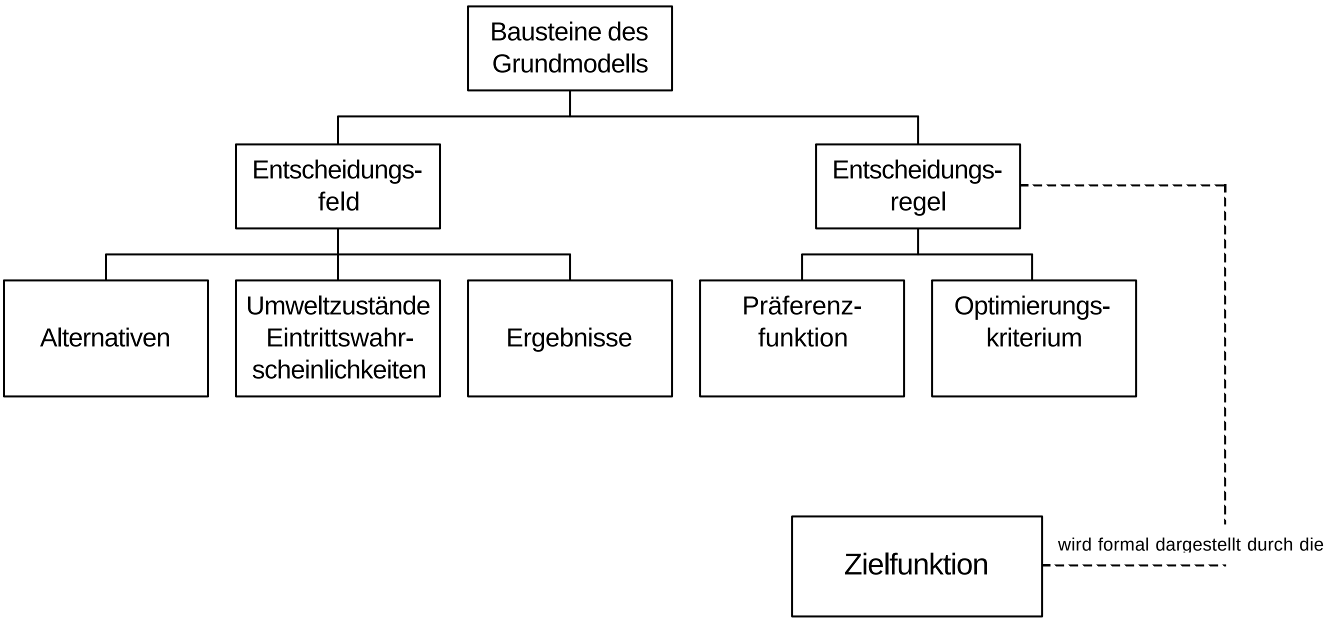
Definition:
Entscheidung ist die mehr oder weniger bewusste Auswahl von mehreren möglichen sich einander ausschließenden Handlungsalternativen.

Denkrichtungen:

- deskriptive / positive / beschreibende Entscheidungstheorie
  - ⇨ versucht zu beschreiben und zu erklären wie Gruppen/Individuen in der Realität tatsächlich entscheiden.
  - ⇨ Tatsächliches Verhalten / ableiten von Normen
  - ⇨ <u>Ziel</u>: Formulierung empirisch gehaltvoller Hypothesen

- präskriptive / normative Entscheidungstheorie
  - ⇨ versucht vorzuschreiben wie Entscheidungen rational getroffen werden können.
  - ⇨ <u>Ziel</u>: Ratschläge für die Lösung von Entscheidungsproblemen

2. Grundmodell der Entscheidungstheorie



2.1 Entscheidungsfeld

2.1.1 Handlungsalternativen

- mindestens 2 Alternativen (sich gegenseitig ausschließend)
- mindestens 2 Alternativen müssen sich darin unterscheiden, dass mit ihnen ein Ziel mehr oder weniger gut erreicht wird
- Häufige Alternativen bestehen aus mehreren Teilaktionen
- Aktionsraum
  - ⇒ formal: $\{ A = a_1, ..., a_m \}$
  - ⇨ eine beliebige Alternative: a_i

Alternativenfindung und -vorauswahl

Alternativen müssen zielgerichtet sein

- Generierung:
  - Alternativen sind (auf natürlich Weise) gegeben
  - Alternativen suchen
  - Alternativen erfinden
- Nebenbedingungen und Restriktionen
- Vorauswahl:
  - bei kontinuierlichen Entscheidungsvariablen ist eine Diskretisierung sinnvoll (Bsp. Farben)
  - Anspruchsniveau festlegen (Bsp. 5 Räume)
  - „Killer-Kriterien“
  - Dominanzprinzipien

Übung 1:
Sie möchten jemandem etwas zum Geburtstag schenken.
In Betracht kommen:
- Kino Gutschein 8,00 EUR
- Kasten Kölsch 12,00 EUR
- Bootsfahrt 26,00 EUR

Sie wollen nicht mehr als 30,00 EUR ausgeben und wären auch bereit statt Sachgütern die vollen 30,00 EUR zu geben. Wie viele Alternativen gibt es?

2.1.2 Umweltzustände und Eintrittswahrscheinlichkeiten

- entscheidungsrelevante Daten
- Umweltzustände sind einander ausschließende Konstellationen von Ausprägungen der entscheidungsrelevanten Daten (Szenarien)
- Erwartungsstruktur über Umweltzustände

Sicherheit

Unsicherheit

Unsicherheit i.e.S. → ohne Wahrscheinlichkeiten

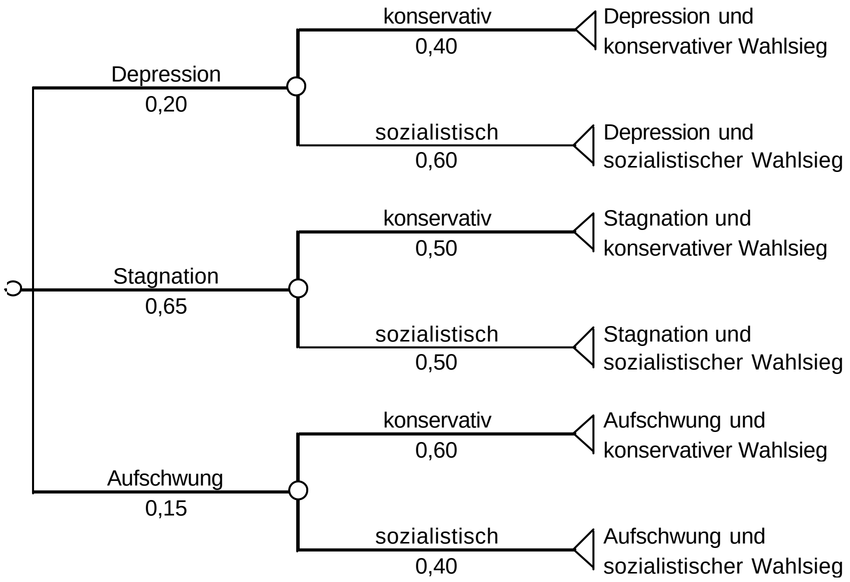
Risiko → mit Wahrscheinlichkeiten
⇒ subjektive vs. objektive

- Menge der Umweltzustände bildet einen Zustandsraum
  - Formal: $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$
  - ein beliebiger Zustand: S_j

Zustandsbäume

- Hilfsmittel zur Darstellung von Szenarien
- entscheidungsrelevante Daten
  - wirtschaftliche Entwicklungen
  - Wahlergebnisse

Beispiel:



Die Wahrscheinlichkeiten für die Wahlausgänge hängen von der wirtschaftlichen Entwicklung ab. Man vermutet, dass die Chancen für die Sozialisten um so höher sind, je schlechter die wirtschaftliche Situation ist

"normale" Wahrscheinlichkeit	**bedingte Wahrscheinlichkeit**	**gemeinsame Wahrscheinlichkeit**
P(Depression) = 0,20	⇓	
P(Stagnation) = 0,65	stochastische Abhängigkeit	
P(Aufschwung) = 0,15		P(Depr.) × P(Kons.WS / Depr.)
1,00	P(kons.Wahls./Depr.) = 0,40	= 0,20 × 0,40 = 0,08

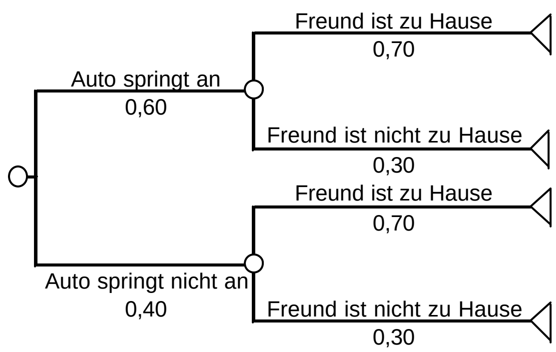
Übung 2: Zustandsbaum und Szenarien

Sie möchten einen Freund zum Geburtstag überraschen. Aufgrund der Erfahrungen der letzten Jahre vermuten Sie, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% nicht zu Hause ist. Weiterhin besteht die Möglichkeit, das Ihr altes Auto nicht anspringt, so dass ein Besuch ausfallen würde. Die Wahrscheinlichkeit hierfür geben Sie mit 40% an.

a) Stellen Sie die relevanten Szenarien mit Hilfe eines Zustandbaumes dar!
b) Wie wahrscheinlich sind diese?

entscheidungsrelevante Merkmale (nicht voneinander abhängig!):

- Freund zu Hause
- Auto springt an



P(springt an) × P(zu Hause) = 0,60×0,70 = 0,42
P(springt an) × P(nicht zu Hause) = 0,60×0,30 = 0,18
P(springt nicht an) × P(zu Hause) = 0,40×0,70 = 0,28
P(springt nicht an) × P(nicht zu Hause) = 0,40×0,30 = 0,12
1,00

Wichtig: die logische Reihenfolge muss beachtet werden, d.h. erst prüfen, ob es überhaupt sinnvoll ist, das (im Text / der Aufgabe) erstgenannte Kriterium an die erste Stelle im Entscheidungsbaum zu setzen (hier jedoch irrelevant, da keine stochastische Abhängigkeit vorliegt)

2.1.3 Ergebnisse

entscheidungsrelevante Konsequenzen je Alternative erforderlich
monetäre versus nicht-monetäre Zielgrößen (z.B.: Jobsuche: Gehalt, Standort, Aufgabe, ...)
eine versus mehrere Zielgrößen
formale Ergebnisfunktion: $e_{ij} = e(a_i, s_j)$

2.1.4 Ergebnismatrix

	S1 $p(S_1)$	S2 $p(S_2)$	… p(…)	S4 $p(S_n)$
a_1	e_{11}	e_{12}	…	e_{1n}
a_2	e_{21}	e_{22}	…	e_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	e_{m1}	e_{m2}	…	e_{mn}

mit $\sum_j P(S_j) = 1$ (Summe aller Wahrscheinlichkeiten)

$p(S_j) > 0$ (Eintrittswahrscheinlichkeit einer Situation > 0, da diese Alternative sonst vernachlässigt werden kann)

Übung 3: Ergebnismatrix
Ein Händler steht vor der Entscheidung seinen Absatzpreis für ein Produkt um 18% zu erhöhen oder ihn bei 10 EUR zu belassen. Im ersten Fall hält er Absatzmengen von 100 und 120, im zweiten Fall von 120 und 140 für möglich.
Stellen Sie die Ergebnismatrix auf.

Alternativenraum

Zustandsraum

	a_1 (€ 11,80)	a_2 (€ 10,00)
S_1	100	120
S_2	100	140
S_3	120	120
S_4	120	140

	S_1	S_2	S_3	S_4
a_1 (€ 11,80)	1.180	1.180	1.416	1.416
a_2 (€ 10,00)	1.200	1.400	1.200	1.400

Zustandsdominanz: a_2 dominiert a_1, weil in jedem denkbaren Zustand ein besseres Ergebnis erzielt wird.

2.2 Entscheidungsregel

2.2.1 Zielfunktion, Präferenzfunktion, Nutzenfunktion

Ziel: Anstreben eines in der Zukunft liegenden Endzustandes, der sich vom gegenwärtigen (Anfangs-)Zustand unterscheidet.

Interdependenzen zwischen Zielen und Handlungsalternativen:

- die in Betracht gezogenen Alternativen hängen davon ab, welche Ziele der Entscheidungsträger verfolgt.
- von den denkbaren Alternativen hängt ab, welche Ziele für die Auswahl einer Alternative maßgeblich sind

Zielfunktion: bildet die Zielvorstellungen eines Entscheidungsträgers ab und ermöglicht die Bewertung von Alternativen

formale Darstellung der Entscheidungsregel:

Präferenzfunktion: Bewertungsfunktion für Alternativen
(ϕ ="phi") (je höher der Präferenzwert, desto höher der Grad der Zielerreichung)

Optimierungskriterium: bringt zum Ausdruck, welche Ausprägung für den Präferenzwert angestrebt wird

- Maximierung der Zielgröße („so viel wie möglich“)
- Minimierung der Zielgröße („so wenig wie möglich“)
- Fixierung der Zielgröße („genau so viel“)
- Satisfizierung der Zielgröße („mindestens so viel“)

- Entscheidungsregel: wähle von zwei beliebigen Alternativen diejenige mit dem günstigsten Präferenzwert
  $\Rightarrow$ ϕ (a_i)➔ Max !

  Ziele der Entscheidungsregel:
  - Auffinden der optimalen Alternative (es kann jedoch auch mehrere optimale Alternativen geben; wenn das Optimierungskriterium gleich ist)
  - Lösung des Entscheidungsproblems

- Beurteilung der Alternativen (via Präferenzfunktion) erfolgt nach den jeweils möglichen Ergebnissen
  $\Rightarrow$ Bewertung der Ergebnisse
  ↳ Bewertungsfunktion für die Ergebnisse (=Nutzenfunktion)
  = den Ergebnissen werden Nutzenwerte zugeordnet
  $\Rightarrow$ Präferenzfunktion aggregiert die einer Alternative a_{ij} entsprechenden Nutzenwerte $U(e_{ij})$ zum Präferenzwert ϕ (a_i)

Bewertung der Ergebnisse heißt damit auch Bewertung der Alternativen, die zu den Ergebnissen führen

2.2.2 Präferenzen

- Voraussetzung für die subjektive (!) Bewertung durch den Entscheidungsträger (ET)
- Grundanforderungen an Präferenzen
  - Axiom (allgemein akzeptierte Grundsätze) als wesentliche Elemente der Rationalität
  - Vollständige & transitive Präferenzordnung
    - Vollständigkeit: ET muss rational entscheiden können, indem für alle Alternativen alle notwendigen Informationen vorliegen

      $e_1 \succsim e_2$ oder $e_1 \angle e_2$ oder $e_1 \sim e_2$

      „wird vorgezogen", denn: grün ist nicht „größer als" gelb, sondern wird präferiert

      „indifferent"

    - Transitivität: (konsistente Entscheidung)

      $e_1 \succsim e_2$ und $e_2 \succsim e_3$ $\Rightarrow$ $e_1 \succsim e_3$
      (wird e_1 dem e_2 und e_2 dem e_3 vorgezogen, dann folgt: e_1 vor e_3)

      $e_1 \sim e_2$ und $e_2 \sim e_3$ $\Rightarrow$ $e_1 \sim e_3$
      (ist e_1 indifferent mit e_2 und e_2 indifferent mit e_3, dann folgt: e_1 indifferent mit e_3)

      $e_1 \succsim e_2$ und $e_2 \sim e_3$ $\Rightarrow$ $e_1 \succsim e_3$
      (wird e_1 dem e_2 vorgezogen und e_2 ist mit e_3 indifferent, dann folgt: e_1 vor e_3)

- Formen der Präferenzen
  - Artenpräferenz: Präferenzen zwischen qualitativ unterschiedlichen Ergebnissen (z.B.: bei Tombola: Wecker oder Teddybär als Preis)
  - Höhenpräferenz: Präferenz zwischen Ergebnissen, die durch ein Merkmal charakterisiert sind, das in einer Zahlenangabe zum Ausdruck kommt (z.B.: 100 Mio. Gewinn besser als 50 Mio.)
  - Zeitpräferenz: Präferenz zwischen Ergebnissen, die zu verschiedenen Zeitpunkten verfügbar sind
    (z.B.: Geld wird heute nicht unbedingt für Konsum benötigt, daher reicht ein geringerer Zins aus, um den Geldinhaber zum anlegen zu überreden, wohingegen ein höherer Zins notwendig ist, um den Geldinhaber zur Anlage zu überreden, wenn das Geld für den Konsum unbedingt benötigt würde)
  - Risikopräferenz: Präferenz zwischen Alternativen, denen jeweils eine Menge möglicher Ergebnisse zugeordnet ist
    - Risikoaversion (ET akzeptiert nur wenig Risiko)
    - Risikoneutralität (Risiko ist dem ET gleichgültig)
    - Risikofreude (Risiko ist das Ziel: z.B. Glücksspiel: hier wird für Risiko sogar bezahlt)

2.2.3 Nutzen und Entscheidungsmatrix

- Nutzen: theoretisches Konstrukt zur Beschreibung von Präferenzen
- Nutzenfunktion: ordnet jedem Ergebnis e_{ij} einen Nutzen $U(e_{ij})$ zu, und zwar so, dass gilt:

  $U(e_1) > U(e_2)$ wenn $e_1 \succsim e_2$
  $U(e_1) = U(e_2)$ wenn $e_1 \sim e_2$
  $U(e_1) < U(e_2)$ wenn $e_1 \angle e_2$

- Nutzenmessung: a) <u>ordinale</u> Nutzenmessung:
  - Größenvergleich zweier Nutzenwerte gibt nur an, ob ein Ergebnis vorgezogen wird, oder ob man zwischen zwei Ergebnissen indifferent ist
  - über das *Ausmaß* der Nutzen*unterschiede* „(um wie viel etwas besser/schlechter ist") lässt sich <u>keine</u> Aussage treffen
    z.B.: $U(e_1) = 3$ und $U(e_2) = 5$ $\Rightarrow$ $e_1 \angle e_2$ weil $U(e_1) < U(e_2)$
  - Präferenzrelation bleibt für jede positive Transformation der Nutzenfunktion erhalten

  Beispiel: „Richterskala" Erdbeben mit 4 ist stärker als Erdbeben mit 2, aber nicht doppelt so stark, da nicht messbar.

  b) <u>kardinale</u> Nutzenmessung:
  - Nutzenunterschiede zwischen je 2 Ergebnissen können in eine Rangfolge gebracht werden
  - über das *Ausmaß* der Nutzen*unterschiede* (=Vorziehenswürdigkeit) lässt sich <u>eine</u> Aussage treffen
    z.B.: $U(e_1) = 5$ und $U(e_2) = 9$ gegen
    $U(e_3) = 12$ und $U(e_4) = 17$
    $\Rightarrow$ $(e_3 \rightarrow e_4) \succeq (e_1 \rightarrow e_2)$
    weil $U(e_4) - U(e_3) > U(e_2) - U(e_1)$ $\Leftrightarrow$ $17-12 > 9-5$ $\Leftrightarrow$ $5>4$
  - kardinale Nutzenfunktion ist bis auf eine positive lineare Transformation eindeutig bestimmt
    $U(e) \rightarrow U_T(e) = \alpha + \beta \cdot U(e)$ mit $\beta > 0$

  Beispiel: „Ranking"
  Abstände zwischen Werten haben gleichen Nutzen
  100 → 101
  5.213 → 5.214
  5.172.815 → 5.172.816

- Entscheidungsmatrix: Ergebnisse der Ergebnismatrix werden über eine Nutzenfunktion in Nutzenwerte überführt

	S_1	S_2	…	S_n
a_1	$U(e_{11})$	$U(e_{12})$	…	$U(e_{1n})$
a_2	$U(e_{21})$	$U(e_{22})$	…	$U(e_{2n})$
…	…	…	…	…
a_m	$U(e_{m1})$	$U(e_{m2})$	…	$U(e_{mn})$

Ergebnismatrix und Entscheidungsmatrix stimmen überein, wenn ...
a) quantifizierbare Zielgröße (z.B.: 5>3)
b) streng monotone Höhenpräferenz bei ordinaler Messung
(mehr Gewinn besser als weniger)
c) linear steigende Höhenpräferenz bei kardinaler Nutzenmessung
(<u>Nutzen</u> des Ergebnisses = <u>Wert</u> des Ergebnisses → $U(e) = e$)

Übung 4: Entscheidungsmatrix

Der Inhaber eines Ausflugrestaurants überlegt am Samstagmorgen, wie viele Torten er für den Sonntag herstellen soll. Für denn Fall, dass es regnet, rechnet er mit so geringem Verbrauch, dass nur zwei Torten verkauft werden. Scheint hingegen die Sonne, rechnet der Wirt mit 20 Torten Absatz. Die Herstellung einer Torte kostet EUR 10,00, der Erlös beträgt EUR 30,00. Der Inhaber will zwischen den folgenden Alternativen wählen:

a_1 = zwei Torten
a_2 = fünf Torten
a_3 = zehn Torten

Sein Ziel ist Gewinnmaximierung. Stellen Sie die Entscheidungsmatrix auf.

Entscheidungsmatrix:

	S_1 = Sonne (20 Torten)	**S_2 = Regen (2 Torten)**
a_1 = 2	(2 × 30) - (2 ×10) = 60 - 20 **= 40**	(2 × 30) - (2 ×10) = 60 - 20 **= 40**
a_2 = 5	(5 × 30) - (5 ×10) = 150 - 50 **= 100**	(2 × 30) - (5 ×10) = 60 - 50 **= 10**
a_3 = 10	(10 × 30) - (10 ×10) = 300 - 100 **= 200**	(2 × 30) - (10 ×10) = 60 - 100 **= - 40**

es wird deutlich, dass a_3 mit wesentlich höherem Risiko belegt ist
⇒ persönliche Einstellung zum Risiko wird bedeutend
⇒ Wahl der Nutzenfunktion gibt Aufschluss über die Risikoeinstellung des ET

⇒ U(e) = e
U(40) = 40

2.3 Strukturierung mit Entscheidungsbäumen

(Vorteil gegenüber Entscheidungsmatrix: sequentieller Aufbau)

- Entscheidungsbäume dienen der anschaulichen Darstellung von Entscheidungssituationen unter Unsicherheit;
  insbesondere bei mehrstufigen Alternativen / Entscheidungen (=Strategien = vollständige Handlungsanweisung))

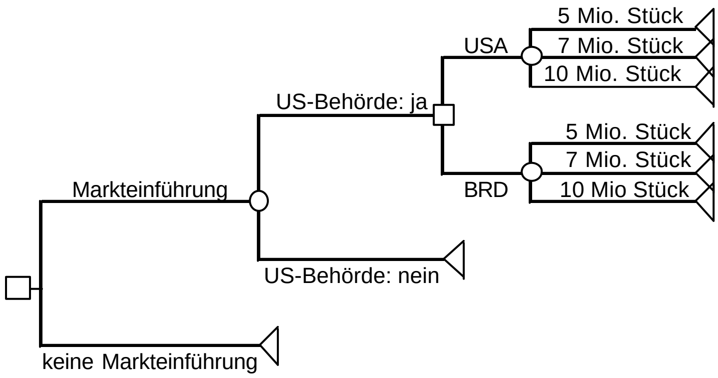
	Symbol
Entscheidung zwischen verschiedenen Alternativen (*aktives Einflussnehmen*)	□
unsichere Tatbestände (*passives Hinnehmen*)	○
Ergebnisse / Konsequenzen	◀
Alternativen	----
Ausprägungen entscheidungsrelevanter Daten	----
Wahrscheinlichkeiten	

(Aktion → exogener Einfluss → Entscheidung → Aktion → exogener Einfluss → ...)

Übung 5: Entscheidungsbaum und -matrix
Ein deutsches Pharmaunternehmen erwägt die Einführung eines Herzmittels auf dem US-Markt. Marktforscher halten einen jährlichen Absatz von 5 Mio., 7 Mio. und 10 Mio. Packungen bei einem Preis von umgerechnet 3 Euro/Packung für möglich. Allerdings könnte die US-Gesundheitsbehörde die Genehmigung verweigern; das Genehmigungsverfahren kostet stets 1 Mio. Euro.
Die Belieferung des US-Marktes kann entweder durch die Errichtung eines Zweigwerkes vor Ort oder durch den Export aus Deutschland erfolgen. Im Zweigwerk würden jährlich 6 Mio. Euro fixe Kosten und je produzierte Packung 0,80 Euro variable Kosten anfallen. Bei Produktion in Deutschland entstünden (zusätzliche) fixe Kosten von 3 Mio. Euro und je Packung 1,20 Euro variable Kosten.

a) Strukturieren Sie das Problem mit Hilfe eines Entscheidungsbaumes.
b) Geben Sie die möglichen Strategien an.
c) Geben Sie die möglichen Szenarien an.
d) Stellen Sie die Entscheidungsmatrix auf (Zielgröße: Gewinn).

a) Entscheidungsbaum:



(5 Mio.× 3) - (1Mio.+6 Mio.+(5 Mio. × 0,80)) = 4,0
(7 Mio.× 3) - (1Mio.+6 Mio.+(7 Mio. × 0,80)) = 8,4
(10 Mio.× 3) - (1Mio.+6 Mio.+(10 Mio. × 0,80)) = 15,0
(5 Mio.× 3) - (1Mio.+3 Mio.+(5 Mio. × 1,20)) = 5,0
(7 Mio.× 3) - (1Mio.+3 Mio.+(7 Mio. × 1,20)) = 8,6
(10 Mio.× 3) - (1Mio.+3 Mio.+(10 Mio. × 1,20)) = 14,0

= -1,0

= 0,0

b) Strategie:

Strategie 1: kein Herzmittel einführen (a_1)
Strategie 2: Herzmittel einführen (a_2)
- keine Genehmigung ⇒ Vorhaben abbrechen
- Genehmigung ⇒ Zweigwerk bauen

Strategie 3: Herzmittel einführen (a_3)
- keine Genehmigung ⇒ Vorhaben abbrechen
- Genehmigung ⇒ Export aus Deutschland

c) Szenarien:

Szenario 1: Genehmigung erteilt (S_1)
Absatz 5 Mio.

Szenario 2: Genehmigung erteilt (S_2)
Absatz 7 Mio.

Szenario 3: Genehmigung erteilt (S_3)
Absatz 10 Mio.

Szenario 4: Genehmigung nicht erteilt (S_4)
kein Absatz

d) Entscheidungsmatrix:

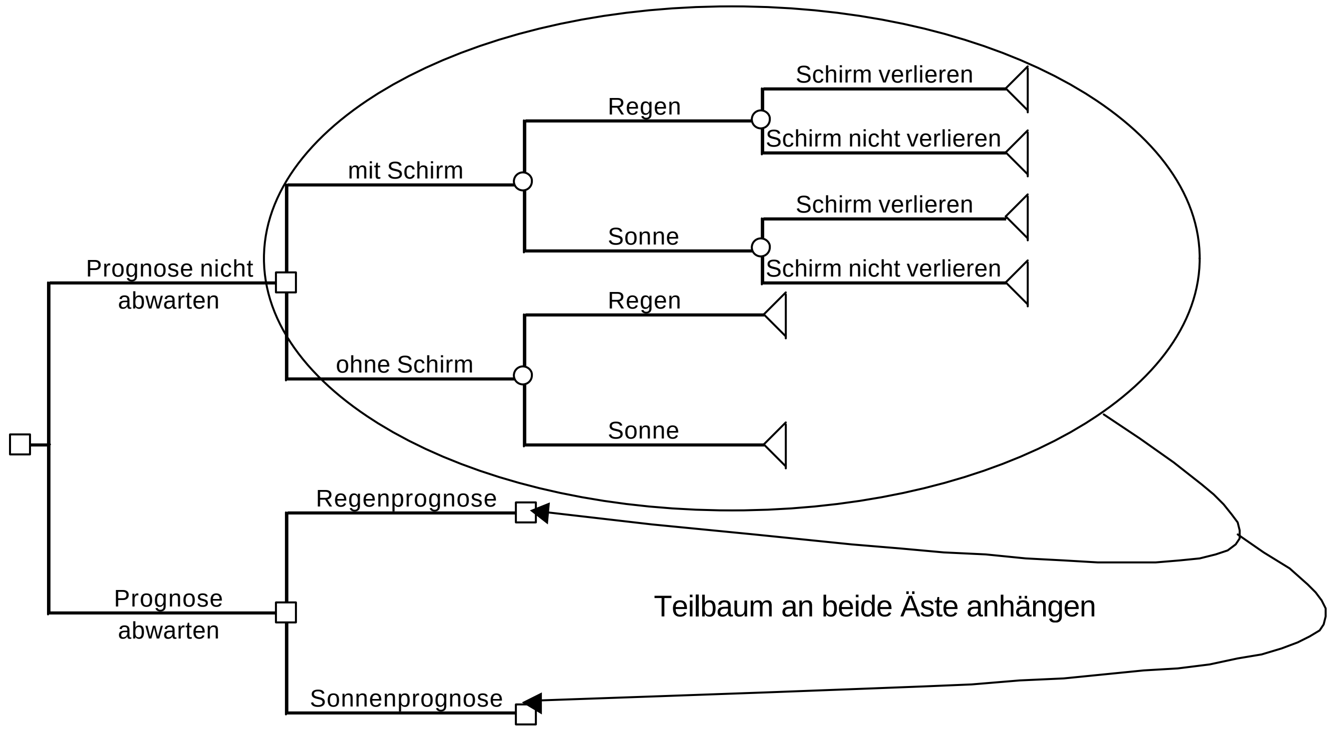
	S_1	S_2	S_3	S_4
a_1	0	0	0	0
a_2	4	8,4	15	-1
A_3	5	8,6	14	-1

- hieraus ist noch keine Entscheidung ableitbar
- kein Dominanzzustand, da keine Alternative in jedem Zustand (Szenario) einer anderen überlegen ist (immer überlegen, da das alles vereinfachen kann!)

Übung 6: Entscheidungsbaum

Sie wollen einen Stadtbummel machen und überlegen sich, ob Sie einen Regenschirm mitnehmen. Falls es regnet und Sie keinen Regenschirm haben, müssen Sie Ihre Kleidung in die Reinigung geben. Andererseits haben Sie keine Lust den Schirm zu tragen und neigen dazu, ihn im Geschäft zu vergessen. Da im Radio die Wettervorhersage ansteht, überlegen Sie, ob Sie noch die Wetterprognose abwarten sollen.

Strukturieren Sie das Problem mit Hilfe eines Entscheidungsbaumes.



Unterschied zu Übung 5: kein monetäres Ziel, sondern konkret: trocken bleiben, Schirm nicht verlieren, wenig Ballast tragen
wenn alle Ziele auf einem einzigen Handlungsstrang erfüllt würden ➔ Zustandsdominanz !

3. Entscheidung bei Sicherheit

3.1 Entscheidung mit einem Ziel

Bsp.: Zielgröße: Gewinnmaximierung
Produkte A und B sind herzustellen

	A	B
Verkaufserlöse	12,-	10,-
k_v	10,-	7,-
db	2,-	3,-
K_F	250,-	

Gewinn = U $- k_G \rightarrow$ Max.

$G = \sum_i (P_i - k_{vi}) \times x_i - K_F$ $\quad$ i = Produkte A, B

x_i = Mengen A, B

„Summe über die Anzahl der Produkte“

Verkaufs-preis

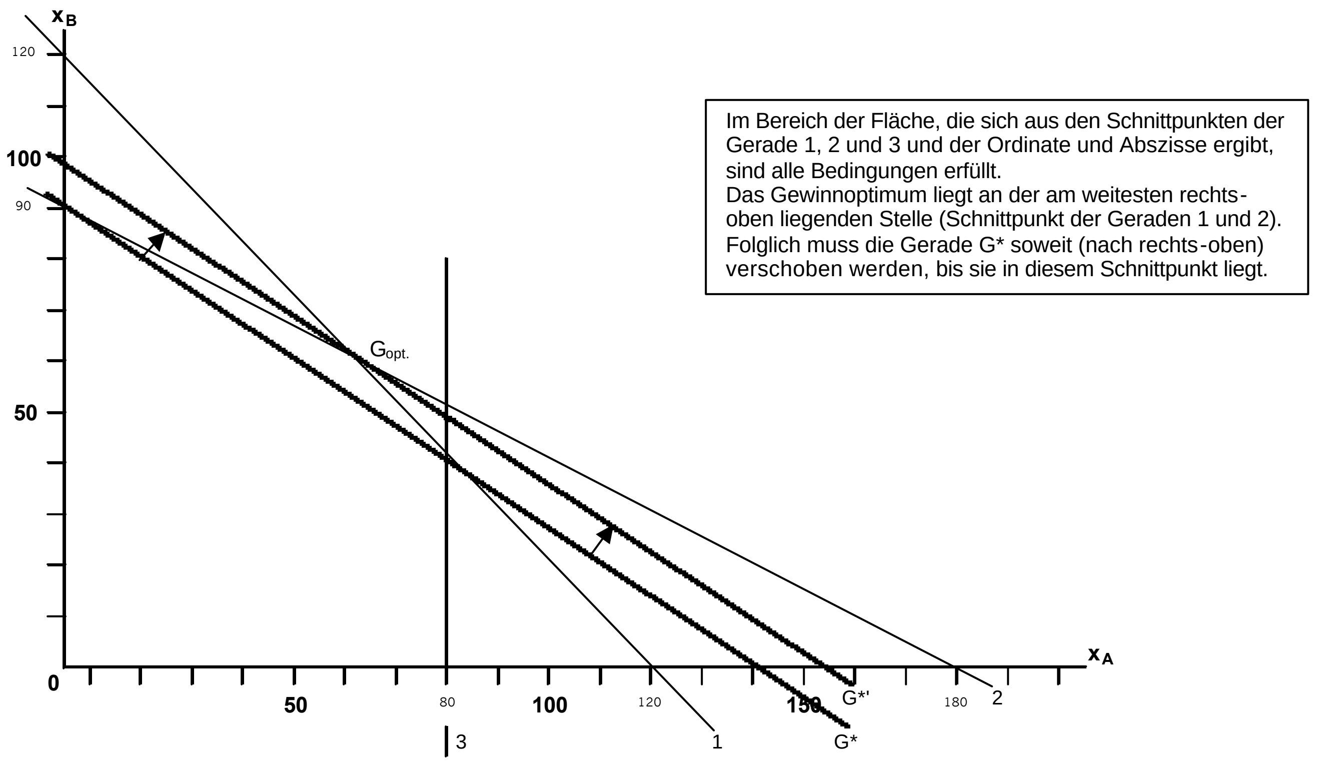
3 Maschinengruppen zur Produktherstellung, die jeweils 1 bestimmte Gesamtkapazität (z.B. Zeiteinheit) haben

Kapazitäts-beanspruchung (pro 1 Stück)	**A**	**B**	**S** (je 100 %)
Maschinen-gruppe 1	1	1	120
Maschinen-gruppe 2	1	2	180
Maschinen-gruppe 3	1	0	80

Formulierung der Nebenbedingungen

1. $1 \times x_A + 1 \times x_B \leq 120$
2. $1 \times x_A + 2 \times x_B \leq 180$
3. $1 \times x_A + 0 \times x_B \leq 80$
4. $x_A , x_B \geq 0$ (klassische Nebenbedingung ⇒ immer aufstellen!)

Bereich zulässiger Lösungen (welche Kombinationen sind überhaupt möglich?)



gesucht: optimale Lösung = maximaler Gewinn

$G = 2x_A + 3x_B - 250$

$G = G^* = 2x_A + 3x_B - 250 \quad | +250 \; -2x_A$

$3x_B = G^* - 2x_A + 250 \quad | \div 3$

$$x_B = \frac{250 + G^*}{3} - \frac{2}{3} x_A$$

mit G* = 20 (willkürliche Annahme)

$$x_B = 90 - \frac{2}{3} x_A$$

$G_{opt.} = 2x_A + 3x_B - 250$

$2 \times 60 + 3 \times 60 - 250 = 50$

3.2 Entscheidung mit mehreren Zielen

Zielgrößen-matrix	z_1	z_2	...	z_z
a_1				
a_1				
...				
a_m				

Ziele sind zueinander...

- neutral (bei Verwirklichung eines Ziels wird das andere Ziel nicht beeinflusst)
- komplementär (die Ziele begünstigen sich gegenseitig)
- konkurrierend (mit Erreichen des einen Ziels wird das andere Ziel unerreichbar)

Entscheidungsregeln:

- Zielunterdrückung

  Zielunterdrückung ist dann sinnvoll, wenn eine schnelle Entscheidung gesucht wird

  (= Entscheidungsträger sucht wichtigstes Ziel aus und entscheidet entsprechend)
  Berücksichtigung nur derjenigen Zielgröße, der der ET das größte Gewicht beimisst, d.h. er entscheidet nur auf der Grundlage dieses einen Ziels;
  nachgeordnete Ziele werden in der Bewertung nicht berücksichtigt, d.h. sind mehrere Alternativen hinsichtlich der entscheidenden Zielgröße gleich, kann keine rationale Entscheidung getroffen werden (bzw. unter (der hier hypothetischen) Berücksichtigung der nachgeordneten Ziele wird ggf. nicht die optimale Alternative gewählt)

- Maximierung der Zielgröße (hier: z_2)
  bei gegebenem Anspruchsniveau der übrigen Zielgrößen (hier: z_1, z_3, z_4)

Zielgrößen-matrix	z_1	z_2	z_3	z_4
	≥ 8	→ max.	≥ 6	≥ 5
a_1	~~5~~	20	6	17
a_2	**9**	~~20~~	6	17
a_3	~~7~~	40	7	19
a_4	**8**	**30**	9	16
a_5	~~7~~	50	8	12
a_6	~~6~~	40	8	11

a_2 domiert a_1

a_5 domiert a_6

Z_1 ist die wichtigste Zielgröße; die anderen sollen nur ein bestimmtes Niveau erreichen

z_3 und z_4 sind bei jeder Alternative erfüllt;
→ vorerst nur noch z_1 und z_2 entscheidungs-relevant;
Vorgabe bei z_1 eliminiert: a_1, a_3, a_5, a_6,
wegen z_2 → max. folgt: a_4

- Zielgewichtung

Gewichtungs-faktor	$g_1 = 4$	$g_2 = 2$	$g_3 = 3$	$g_4 = 2$	
	z_1	z_2	z_3	z_4	Σ
a_2	9	20	6	17	~~128~~
a_3	7	40	7	19	**167**
a_4	8	30	9	16	~~151~~

Σ = Summe der Produke
z.B.: $9\times4 + 20\times2 + 6\times3 + 17\times4 = 128$

Kritikpunkt: Findung/Bestimmung des „korrekten“ Gewichtungsfaktors, da subjektiv

die Zielgrößen werden gewichtet ⇒ sie beeinflussen das Ergebnis (und werden nicht vernachlässigt, wie bei der Zielunterdrückung)

- Lexikographische Ordnung
  sukzessive Maximierung der Zielgröße entsprechend ihrer Wichtigkeit (hier: 1 → 4), solange mehrere Alternativen vorhanden sind

	z_1	z_2	z_3	z_4
a_1	~~5~~	~~20~~	~~6~~	~~17~~
a_2	**9**	~~20~~	~~6~~	~~17~~
a_3	~~6~~	~~30~~	~~7~~	~~16~~
a_4	**9**	**40**	**8**	~~12~~
a_5	~~7~~	~~50~~	~~9~~	~~10~~
a_6	**9**	**40**	**8**	**14**

als erstes sind die höchsten Werte des ersten Ziels zu selektieren und die anderen Alternativen eliminieren;
dann bei den verbleibenden Alternativen die höchsten Werte der nachrangigen Ziele auswählen;
so dass als auszuwählende Alternative diejenige verbleibt, die in dem vorherigen Ziel den höheren Wert hatte

Problem:

	z_1	z_2	z_3
a_1	10	10	10
a_2	9,9	40	30

Kritik: ein marginaler Vorteil bzgl. der wichtigsten Zielgröße ist nicht mehr kompensierbar

4. Entscheidung bei Unsicherheit

4.1 Entscheidungen ohne Berücksichtigung von Wahrscheinlichkeiten (ohne Risiko)

4.1.1 Zustandsdominanz und Effizienz

Zustandsdominanz: eine Alternative dominiert eine andere, wenn sie im Vergleich zu dieser zweiten Alternative in keinem Zustand ein schlechteres Ergebnis, jedoch in mindestens einem Zustand ein besseres Ergebnis liefert.

oder: eine Alternative a_i dominiert eine Alternative a_j, wenn sie für jedes relevante Ziel mindestens ein gleich hoher und bei mindestens einem Ziel ein höhere Zielerreichungsgrad ergibt.

dominante Alternativen können ausgesondert werden; die verbleibenden (=nicht-dominanten) Alternativen sind effiziente Alternativen

4.1.2 Zustandsdominanz und Effizienz

	S_1	S_2	S_3	S_4	Maxi-Min	Maxi-Max	Hurwicz $\alpha = 0,5$	Niehans -Savage	Laplace
a_1	5	6	6	7	**5**	7	6	5	6
a_2	10	2	3	0	0	**10**	5	9	3,75
a_3	4	5	5	9	4	9	**6,5**	6	5,75
a_4	8	8	7	3	3	8	5,5	6	**6,5**
a_5	7	6	3	6	3	7	5	**4**	5,5

siehe Tabelle auf S. 17

a) MaxiMin-Regel (= MiniMax-Regel)

- maßgeblich für die Alternativenbeurteilung: der Erfolg im schlechtesten Fall
- gewählt wird die Alternative mit dem größten Mindesterfolg

$\Rightarrow$ ZF $\phi(a_i) = \underset{j}{\text{Min}}\, Z_{ij} \rightarrow \underset{i}{\text{Max}}$!

Zielfunktion

Kritik: - es wird nur ein einziger Wert betrachtet, alle anderen werden ignoriert –
$\Rightarrow$ extrem pessimistische Einstellung
- nur das schlechteste Ergebnis wird bei jeder Alternative berücksichtigt –
- einfach +

b) MaxiMax-Regel

- maßgeblich für die Alternativenbeurteilung: der Erfolg im günstigsten Fall
- gewählt wird die Alternative mit dem größten Erfolg

$\Rightarrow$ ZF $\phi(a_i) = \underset{j}{\text{Max}}\, Z_{ij} \rightarrow \underset{i}{\text{Max}}$!

Kritik: - es wird nur ein einziger Wert betrachtet, alle anderen werden ignoriert –
$\Rightarrow$ extrem optimistische Einstellung

c) Hurwicz-Regel (Optimismus-Pessimismus-Kriterium)

- maßgeblich für die Alternativenbeurteilung: höchster und niedrigster Erfolg
- gewogener Durchschnitt mit einem subjektiven Gewichtungsfaktor α mit $0 \leq \alpha \leq 1$ für Maximalerfolg und $1 - \alpha$ für Minimalerfolg

$\Rightarrow$ ZF $\phi(a_i) = \alpha \times (\underset{j}{\text{Max}}\, Z_{ij}) + (1 - \alpha) \times \underset{j}{\text{Min}}\, Z_{ij} \rightarrow \underset{i}{\text{Max}}$!

zunächst: Entscheidungs*prinzip*
$\Rightarrow$ wird durch Fixierung von α zu einer Entscheidungs*regel*

$\alpha = 1 \rightarrow$ MaxiMax-Regel
$\alpha = 0 \rightarrow$ MaxiMin-Regel

Kritik: - α muss ermittelt werden
- Vernachlässigung mehrerer Ergebnisse (nur Max. und Min. sind relevant)

d) Niehans-Savage-Regel

- Alternativenbeurteilung erfolgt nicht unmittelbar auf der Grundlage der Ergebnisse, sondern auf der Basis entsprechender „Bedauernswerte“
  $\Rightarrow$ Bedauernswert der (bestimmten/konkreten) Alternative i* für den Zustand j
  = Differenz aus dem in diesem Zustand maximal erreichbaren Erfolg und dem Erfolg der Alternative i*

$\Rightarrow$ $B_{ij} = \underset{j}{\text{Max}}\, Z_{ij} - Z_{i^*j}$

Ziel: Erreichung eines möglichst kleinen Bedauernswertes
$\Rightarrow$ Wahl der Alternativen, bei der der maximale Bedauernswert am kleinsten ist

$\Rightarrow$ $\phi(a_i) = \underset{j}{\text{Max}}\, B_{ij} \rightarrow \underset{j}{\text{Min}}$!

Bedauernsmatrix:

	S_1	S_2	S_3	S_4	Zeilenmax.
a_1	**5**	2	1	2	5
a_2	0	6	4	**9**	9
a_3	**6**	3	2	0	6
a_4	2	0	0	**6**	6
a_5	3	2	**4**	3	**4**
„Bezugs-größe“	10	8	7	9	–

soll minimiert werden !

aus obiger Tabelle

Bsp.: Max. in S_1 = 10; e_{11} = 5 $\Rightarrow$ $Max_{S1} - e_{11} = 10 - 5 = 5$

Kritik: - pessimistische Einstellung –

e) Laplace-Regel

- bisherige Entscheidungsregel: Basis 1-2 Ergebnisse
- Berücksichtigung aller möglichen Ergebnissen unter der Annahme gleich-wahrscheinlicher Zustände (Eintrittswahrscheinlichkeit: 1/n) Summe durch Anzahl
- „Prinzip des unzureichenden Grundes“: es gibt keinen Grund, warum ein Zustand mit größerer Wahrscheinlichkeit eintreten sollte, als ein anderer

$$\Rightarrow \phi(a_i) = \sum_j 1/n \times Z_{ij} \rightarrow \max_j !$$

Kritik: - Berücksichtigung aller vorliegender Informationen +
- einfach +
- Definition der Zustände bestimmt Anzahl der Zustände und damit die Entscheidung –
- Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit –
(z.B.: die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Berge absolut gleichhoch sind;
- der erste Berg ist höher als der zweite Berg $\Rightarrow$ wahrscheinlich
- der erste Berg ist niedriger als der zweite Berg $\Rightarrow$ wahrscheinlich
- der erste Berg ist genauso hoch wie der zweite Berg $\Rightarrow$ unwahrscheinlich !)

Beurteilung mit Hilfe von Postulaten / Axiomen für rationales Verhalten

1. durch eine Entscheidungsregel soll eine vollständige und transitive Präferenzordnung auf der Alternativenmenge definiert werden
$\Rightarrow$ von allen erfüllt

2. Rangordnung der Alternativen soll unabhängig von der Reihenfolge und Bezeichnung der Alternativen und Zustände sein
$\Rightarrow$ von allen erfüllt

3.1 falls eine Alternative a_1 eine andere Alternative a_2 dominiert, dann soll die Alternative a_1 in der Präferenzordnung vor a_2 liegen

Beispiel:

	S_1	S_2	S_3	Maxi-Min	Maxi-Max	Hurwicz	S-N	Laplace
a_1	1	3	7	1	7	4	4	3,7
a_2	1	1	7	1	7	4	4	3
a_3	5	3	0	0	5	2,5	7	2,7
Alternative a_1 dominiert a_2				irrationaler Faktor in Entscheidungsregel; Verstoß gegen das Dominanzprinzip				konform mit Dominanzprinzip

Bedauernsmatrix zu S-N

	S_1	S_2	S_3	B
a_1	4	0	0	4
a_2	4	2	0	4
a_3	0	0	7	7

3.2 abgeschwächtes Dominanzprinzip: wenn eine Alternative eine andere dominiert, soll sie in der Rangordnung nicht hinter ihr liegen.

4. durch das Hinzufügen / Streichen einer identischen Spalte (= des gleichen Zustandes) in der Ergebnismatrix soll sich die Rangfolge unter den Alternativen nicht ändern

Beispiel: Spieleinsatz bei Teilnahme am Würfelspiel: 2 GE; Gewinn nur bei „6“: 10 GE

Würfel	= 6	≠ 6
a_1 = Teilnahme	10	-2
a_2 = Nicht-Teilnahme	0	0

Laplace: Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln ist genauso hoch, wie keine 6 zu würfeln (⇒ 50:50); demnach gäbe es nur zwei Zustände; mit tatsächlich „nicht-gleichen“ Wahrscheinlichkeiten: 1/6 : 5/6

Würfel	= 1	= 2	= 3	= 4	= 5	= 6
a_1 = Teilnahme	-2	-2	-2	-2	-2	10
a_2 = Nicht-Teilnahme	0	0	0	0	0	0

tatsächlich: es gibt mehr Zustände, mit gleichen Wahrscheinlichkeiten:
1/6 : 1/6 : 1/6 : 1/6 : 1/6 : 1/6

⇒ von allen -außer Laplace- erfüllt

5. Hinzufügen / Streichen einer Alternative soll die Rangordnung der übrigen Alternativen unverändert lassen

Beispiel mit nachträglich hinzugefügter Alternative a_3

	S_1	S_2	S_3	Maxi-Min	Maxi-Max	Hurwicz	S-N		Laplace
a_1	4	3	1	**1**	**4**	**2,5**	**1**	3	**2,7**
a_2	3	1	2	**1**	3	2	2	**2**	2
a_3	0	0	4	0	**4**	2		4	1,3

bei S-N wird für Bedauernswert je Zustand immer auf eine Alternative Bezug genommen
Þ wenn diese wegfällt oder durch eine neue übertroffen wird, ändert sich alles

vor dem Hinzufügen von a_3

	S_1	S_2	S_3	B
a_1	0	0	**1**	**1**
a_2	1	**2**	0	2

nach dem Hinzufügen von a_3

	S_1	S_2	S_3	B
a_1	0	0	**3**	3
a_2	1	**2**	**2**	**2**
a_3	**4**	3	0	4

Das Hinzufügen von Alternative a_3 verursacht eine Verschiebung von Alternative a_1 zu Alternative a_2

Beurteilung

		MaxiMin	MaxiMax	Hurwicz	S-N	Laplace
1.	vollständige + transitive Ordnung	+	+	+	+	+
2.	Unabhängigkeit von der Reihenfolge + Bezeichnung	+	+	+	+	+
3.1	strenges Dominanzprinzip	-	-	-	-	+
3.2	abgeschwächtes Dominanzprinzip	+	+	+	+	+
4.	Spaltenverdoppelung	+	+	+	+	-
5.	Rangordnung unabhängig vom Hinzufügen / Streichen von Alternativen	+	+	+	-	+

strenges Dominanzprinzip: mindestens 1 Wert muss größer sein
abgeschwächtes Dominanzprinzip: alle Werte können gleich sein (es muss keiner größer sein)

Schlussfolgerung:
- es gibt keine Entscheidungsregel ohne Nachteile
- S-N – Regel hat die größten/meisten Schwächen
- keine Entscheidungsregel ist unkritisch
- es sollten immer mehrere Entscheidungsregeln angewendet werden

4.2 Entscheidungen bei Risiko

4.2.1 Klassische Entscheidungsprinzipien

Entscheidugsprinzip: allgemein
Entscheidugsregel: konkret

4.2.1.1 Entscheidungswertprinzip (μ-Prinzip, Bayes-Regel)

maßgeblich: mathematischer Entscheidungswert

$$\Rightarrow \mu_i = E(e_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} P_j \times e_{ij}$$

„Summe aller Ergebnisse in allen (j=1 bis n) Zuständen je Alternative“

Entscheidungsregel: optimal ist die Alternative, bei der μ maximal wird

Kritik: subjektive Bedeutung der einzelnen Ergebnisse für den Entscheidungsträger wird vernachlässigt (z.B.: Risikofreude, -neutralität, -aversion)
$\Rightarrow$ nur bei Risikoneutralität o.k.

	S_1 0,2	S_2 0,2	S_3 0,3	S_4 0,3	Σ
a_1	10	-50	40	100	**34**
a_2	30	10	20	50	29

Petersburger Spiel: eine Münze wird so lange geworfen, bis Kopf fällt, dann ist das Spiel beendet
wie hoch ist der Einsatz, den ein Spieler bereit ist zu zahlen?

folgende Gewinnverteilung:

Wurfergebnisse	K	Z K	Z Z K
Gewinn	2^1 GE	2^2 GE	2^3 GE
Wahrscheinlichkeit	$0{,}5^1$ = 0,5	$0{,}5^2$ = 0,25	$0{,}5^3$ = 0,125

bei stochastisch unabhängigen Wahrscheinlichkeiten werden die Wahrscheinlichkeitswerte miteinander multipliziert $\Rightarrow$ x^n

$\mu = 2 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}25 + 8 \times 0{,}125 \ldots$
$\mu = \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad \ldots$
$\mu = \infty$

$\Rightarrow$ Anwendungsgrenze ! (Risiko)

4.2.1.2 $\mu\sigma$-Prinzip (Standardabweichung) / $\mu\sigma^2$-Prinzip (Varianz)

4.2.1.2.1 Charakterisierung

Varianz: $\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} P_j(e_{ij} - \mu_i)^2$

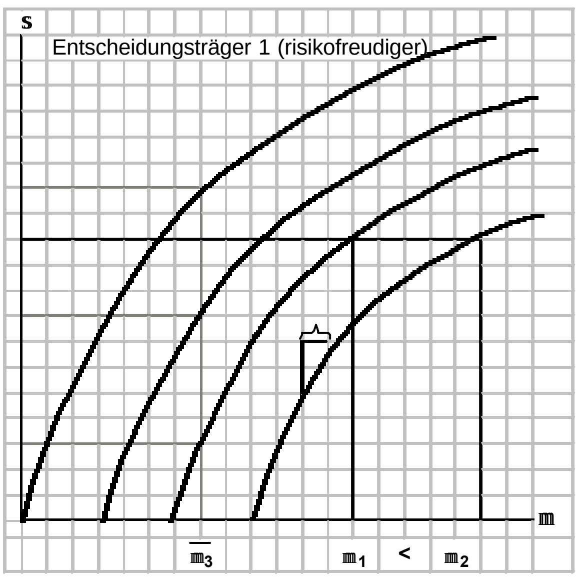
Standardabweichung: $\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} P_j(e_{ij} - \mu_i)^2}$

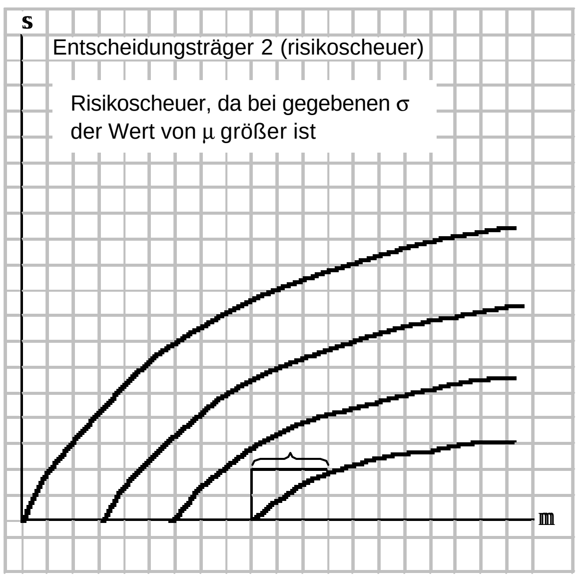
Interpretation: μ charakterisiert das mittlere Ergebnisniveau (e_{ij}) bzw. den mittleren Zielerreichungsgrad (Z_{ij})
σ charakterisiert das Risiko, wird also als Risikomaß verstanden

$\Rightarrow \phi(\tilde{Z}) = \phi(\mu, \sigma)$

<u>Risikoaversion</u>
Ein Entscheidungsträger wählt von zwei beliebigen Alternativen mit dem selben Erwartungswert der Zielgröße jene mit der *kleineren* Standardabweichung.

- insbesondere wird ein sicherer Zielgrößenwert in Höhe von μ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dem Erwartungswert μ vorgezogen (*sicheres* Ergebnis μ)
- Indifferenzkurvendarstellung: geometrischer Ort gleichwertiger $\mu\sigma$ -Kombinationen (*erwartetes* Ergebnis μ)





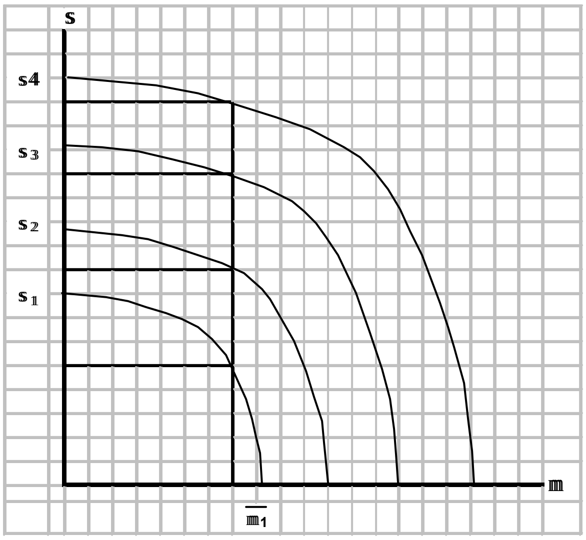
- je weiter nach rechts, desto größer der Wert (die Bedeutung) für den ET, da der Erwartungswert μ größer ist
- je weiter oben (vgl. μ_3), desto größer die Abweichung, d.h. desto größer das Risiko

Risk-Return-Beziehung: Austausch von zusätzlichem Risiko bzw. Rendite

Risikofreude

Ein Entscheidungsträger wählt von zwei beliebigen Alternativen mit dem selben Erwartungswert der Zielgröße jene mit der *größeren* Standardabweichung.

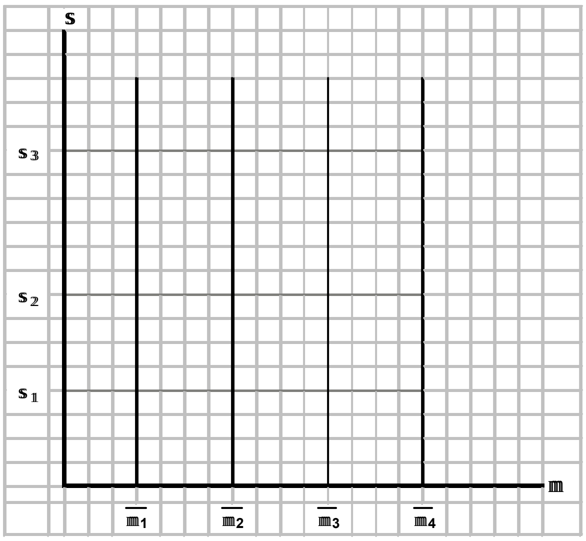
- insbesondere wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dem Erwartungswert μ dem sicheren Zielgrößenwert in Höhe von μ vorgezogen
- Indifferenzkurvendarstellung:



- je weiter nach rechts, desto größer der Erwartungswert (⇒ auch bei Risikofreude besser)
- je weiter oben, desto größer die Abweichung, desto größer das Risiko (desto höher der Return)

Risikoneutralität

Bei zwei beliebigen Alternativen mit dem selben Erwartungswert der Zielgröße ist es dem Entscheidungsträger egal, ob er diejenige mit der größeren oder mit der niedrigeren Standardabweichung wählt.



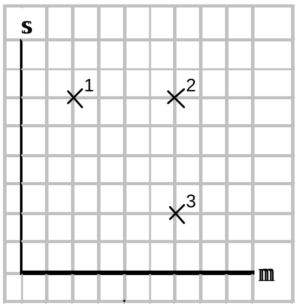
- je weiter nach rechts, desto größer der Erwartungswert (⇒ auch bei Risikoneutralität besser)
- die Höhe des Risikos spielt jedoch keine Rolle (größeres σ)

4.2.1.2.2 ms -Dominanz ¹ Zustandsdominanz

Voraussetzung: Risikoaversion
Alternative a_1 dominiert Alternative a_2 hinsichtlich μ und σ, wenn gilt:
$\mu_1 \geq \mu_2$, $\sigma_1 \leq \sigma_2$
$\mu_1 > \mu_2$ oder $\sigma_1 < \sigma_2$

$\Rightarrow$ 3 Fälle von Dominanz:
- bei gleichem σ höheres μ
- bei gleichem μ niedrigeres σ
- bei höherem μ niedrigeres σ

eine Alternative ist effizient hinsichtlich μ und σ, wenn sie von keiner anderen hinsichtlich μ und σ dominiert wird



3 dominiert 2, da bei gleichem Erwartungswert μ ein niedrigeres Risiko σ gegenübersteht
2 dominiert 1, da bei gleichem Risiko σ ein höherer Erwartungswert μ erreicht wird
3 dominiert 1, da bei höherem Erwartungswert μ ein niedrigeres Risiko σ gegenübersteht

$\Rightarrow$ effizient: 3, da sie <u>nie</u> dominiert wird

Bsp. 1	S_1 0,5	S_2 0,5	μ	σ
a_1	10	5	7,5	2,5
a_2	3	4	7,5	0,5

Zustandsdominanz (unter S_1, S_2) — keine $\mu\sigma$-Dominanz (unter μ, σ)

Zustandsdominanz für Alternative a_1: ja (höherer Erwartungswert bei jedem Zustand)
$\mu\sigma$-Dominanz Alternative a_1: nein (gleicher Erwartungswert bei höherem Risiko)

Bsp. 2	S_1 0,5	S_2 0,5	μ	σ
a_1	10	9	9,5	0,5
a_2	0	10	5	5

keine Zustandsdominanz — $\mu\sigma$-Dominanz

Zustandsdominanz für Alternative a_1: nein (nicht bei jedem Zustand höherer Erwartungswert)
$\mu\sigma$-Dominanz Alternative a_1: ja (höherer Erwartungswert bei niedrigerem Risiko)

1. Eliminierung ineffizienter Alternativen
2. Sind mehrere Alternativen effizient, dann Ermittlung der optimalen Alternative durch Gewichtung von μ und σ mittels Präferenzfunktion

   $\Rightarrow \phi(\mu_i,\sigma_i) = \mu_i, - (\alpha \times \sigma_i)$

   wenn $\alpha > 0$: Risikoabschlag (bei Risikoaversion)
   wenn $\alpha < 0$: Risikozuschlag (bei Risikofreude) → Alternative wird umso wertvoller, je höher das Risiko is
   wenn $\alpha = 0$: Risikoneutralität

4.2.1.2.3 Kritik

Vorteile: Einfachheit
unter bestimmten Bedingungen: Vereinbarkeit mit Bernoulli-Prinzip (Rationalität !)

Nachteile: Informationsverlust durch Beschränkung auf 2 Parameter
Möglicher Verstoß gegen Dominanzprinzip (i.S.d. Zustandsdominanz)

	S_1 0,7	S_2 0,3	μ_i	σ_i
a_1	0	10	3	4,6
a_2	10	40	19	13,7

Zustandsdominanz — keine $\mu\sigma$-Dominanz

$\Rightarrow$ gemeine Zustandsdominanz: $a_1 \succeq a_1$ → $\phi(\mu_i,\sigma_i) = \mu_i, - (\alpha \times \sigma_i)$

$\phi_1 = \phi(\mu_1,\sigma_1) = 3 - (\alpha \times 4{,}6)$ und $\phi_2 = \phi(\mu_i,\sigma_i) = 19 - (\alpha \times 13{,}7)$

den kritischen Wert erhält man durch Gleichsetzen:

$$3 - (\alpha \times 4{,}6) = 19 - (\alpha \times 13{,}7)$$
$$\alpha = 1{,}76$$

$\Rightarrow$ Anwendungsgrenzen beachten; nicht generell abzulehnen

Übung 7: ms -Prinzip

Ein risikoscheuer Entscheidungsträger möchte zwischen Alternativen a_1 bis a_4 eine Auswahl treffen.

a) Untersuchen Sie die Alternativen auf Dominanzbeziehungen, und geben Sie jeweils die effizienten Alternativen an.
b) Wenden Sie auf alle Alternativen folgende Entscheidungsregeln an:

   (1) $\phi(a_i) = \mu_i - 1{,}5\,\sigma_i$ (Risikoaversion)

   (2) $\phi(a_i) = \dfrac{\mu_i}{\sigma_i}$

   (3) $\phi(a_i) = 0{,}3\,\mu_i + 4\,\sigma_i$ (Risikofreude)

a)	S_1 0,2	S_2 0,4	S_3 0,4	μ	σ
a_1	10	20	5	12	6,78
a_2	22	4	4	7,6	7,2
a_3	10	10	4	7,6	2,94
a_4	23	8	4	9,4	7,03

Zustandsdominanz-beziehung

$a_4 \succ a_2$
$a_1 \succ a_3$

$\mu\sigma$-Dominanz-beziehung

$a_1 \succ a_4$
$a_1 \succ a_2$
$a_3 \succ a_2$
$a_4 \succ a_2$

a_1 und a_3 sind $\mu\sigma$-effizient, da a_4 von a_1 dominiert wird

a_3 wird im Sinne der Zustandsdominanz dominiert, nicht aber hinsichtlich μ und σ.
a_4 wird hinsichtlich μ und σ dominiert, nicht aber im Sinne der Zustandsdominanz.

Entscheidung: - aussondern von a_2 und a_3 (wg. Zustandsdominanz)
- aussondern von a_4 (wg. $\mu\sigma$-Dominanz)
$\Rightarrow$ verbleibende Alternative : a_1 (folglich ist a_1 einzige effiziente Alternative)

b)	für (1)	für (2)	für (3)
a_1	ϕ = 1,83	ϕ = 1,77	ϕ = 30,72
a_2	ϕ = -3,20	ϕ = 1,06	ϕ = **31,08**
a_3	ϕ = **3,19**	ϕ = **2,59**	ϕ = 14,04
a_4	ϕ = -1,15	ϕ = 1,34	ϕ = 30,94
	a_3 ist zu wählen, weil diese Alternative den höchsten Präferenzwert aufweist; aber: Verstoß gegen die Zustandsdominanz		Verstoß gegen beide Dominanzprinzipien

4.2.2 Bernoulli-Prinzip

4.2.2.1 Charakterisierung

- jedes Ergebnis wird explizit (nicht in einer Summe wie bei $\mu\sigma$-Prinzip) mit seiner Eintrittswahrscheinlichkeit berücksichtigt
- Ergebnisgrößen werden mit Hilfe der Risiko-Nutzen-Funktion (RNF) in Nutzenwerte transformiert $\rightarrow$ kardinale Nutzenfunktion
- Ergebnisse müssen nicht monetär sein
- Axiome implizieren rationales Verhalten $\rightarrow$ Bernoulli-Prinzip steht damit im Einklang
- Entscheidung in zwei Schritten:
  - Bestimmung der RNF U(e), die den Ergebnissen e_{ij} einer Alternative a_i reelle Nutzenwerte zuordnet
  - Bestimmung der optimalen Alternative
    $\rightarrow$ wähle diejenige Alternative, die den höchsten Nutzenerwartungswert (NEW) aufweist

Zielfunktion: $\phi(a_i) = \sum_{j=1}^{n} P_j \times U(e_{ij}) \rightarrow \text{Max}!$

Übung 8: Entscheidung nach dem Bernoulli-Prinzip

Gegeben sei folgende Ergebnismatrix:

	S_1 0,3	S_2 0,5	S_3 0,2
a_1	16	9	25
a_2	4	16	49

Wie entscheidet sich ein Entscheidungsträger nach dem Bernoulli-Prinzip, wenn seine Nutzenfunktion $U(e) = \sqrt{e}$ lautet?

⇒ risikoscheu, da durch Wurzelfunktion der Wert reduziert wird

Entscheidungsmatrix:

	S_1 0,3	S_2 0,5	S_3 0,2	$\phi(a_i)$ = NEW
a_1	4	3	5	4*0,3+3*0,5+5*0,2 =3,7
a_2	2	4	7	2*0,3+4*0,5+7*0,2 **=4,0**

4.2.2.2 Ermittlung der RNF

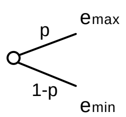
→ Bernoulli-Befragung

<u>1. Schritt: Normierung der RNF</u>

- Auswahl des günstigsten Ergebnisses e_{max} und des ungünstigsten Ergebnisses e_{min} aus der Menge der möglichen Ergebnisse
- Zuordnung von Nutzenwerten:
  $U(e_{ma}) = 1$; $U(e_{min}) = 0$

<u>2. Schritt: hypothetische Wahlakte</u>

- dem Entscheidungsträger wird die Wahl angeboten zwischen:
  - sicheren Ergebnis e_{ij}
  - Lotterie

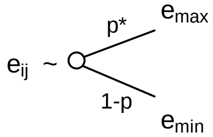


oder: alternative Darstellung: $\{e_{max}$; p ; $e_{min}\}$

Basis-Referenz-Lotterie (BRL)

<u>3. Schritt: Bestimmung der Indifferenzwahrscheinlichkeit</u>

- der Entscheidungsträger soll angeben, bei welchem Wert er unschlüssig = indifferent ist



Sicherheitsäquivalent: sicheres Ergebnis, das der Entscheidungsträger als zur Lotterie gleichwertig einschätzt

4. Schritt: Ermittlung der Nutzenwerte

$$U(BRL) = p^* \times \underbrace{U(e_{max})}_{1} + (1-p^*) \times \underbrace{U(e_{min})}_{0} = U(e_{ij}) = U(SÄ)$$

$$\Leftrightarrow \quad U(BRL) = p^* = U(e_{ij})$$

Nutzen der BRL ist gleich der Indifferenzwahrscheinlichkeit !

5. Schritt: graphische Darstellung der RNF

wird jedem möglichen Ergebnis der jeweilige Nutzenwert zugeordnet, so erhält man Stützpunkte der RNF $\{e_{ij}, U(e_{ij})\}$

6. Schritt: Konsistenzprüfung

Prüfung, ob die Angaben des Entscheidungsträgers stichhaltig sind und seiner zu seiner Risikoeinstellung passen (Verifizierung von „Ausreißern“)

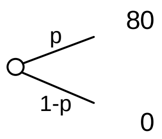
Übung 9: Bestimmung der RNF

Gehalt: entweder 0 T€ (= keine Beschäftigung) oder 80 T€ (= feste Beschäftigung)

1. Schritt: Normierung der RNF

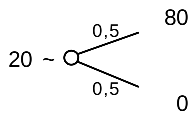
$U(e_{min}) = U(\;0T€) = 0$
$U(e_{max}) = U(80T€) = 1$

2.-4. Schritt: hypoth. Wahlakte, Bestimmung d. Indiff.wahrscheinlichkeit, Ermittlung d. Nutzenwerte

BRL: 

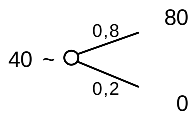
oder: {80 ; p ; 0}

Bsp. 1:



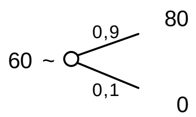
Erwartungswert: 40
U(20) = 0,5

Bsp. 2:



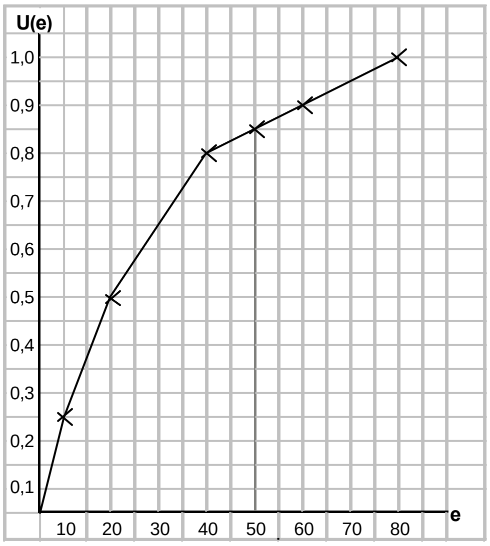
Erwartungswert: 64
U(40) = 0,8

Bsp. 3:



Erwartungswert: 72
U(60) = 0,9

5. Schritt: graphische Darstellung

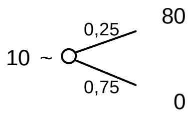


Kurve steigt degressiv
⇒ Beleg für Risikoaversion (z.B.: Wurzelfunktion)

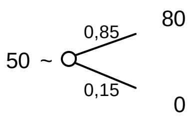
Verbinden der Punkte: „lineare Interpolation"

6. Schritt: Konsistenzprüfung

„was ist bei e=10 oder e=50 (nicht abgefragte Werte) ?"



Erwartungswert: 20
U(10) = 0,25



Erwartungswert: 68
U(50) = 0,85

4.2.2.3 Axiomatik des Bernoulli-Prinzips

Ergebnismatrix

	S_1 0,35	S_2 0,5	S_3 0,15
a_1	100	20	30
a_2	60	80	0

2 Lösungsalternativen existieren:
1. Bernoulli-Prinzip
2. Sukzessives Anwenden der Axiome

Lotterie: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ergebnisgrößen
$L = (e_1 \times p_1, e_2 \times p_2, ..., e_m \times p_m)$

BRL: $L = (e_{max}; p; e_{min})$

4.2.2.3.1 Entscheidung nach dem Bernoulli-Prinzip

<u>1. Schritt: Normierung</u>
$U(e_{max}) = U(100) = 1$
$U(e_{min}) = U(0) = 0$

<u>2. Schritt: Bestimmung der Nutzenwerte</u>
a) 20 ~ (100; 0,3; 0) ⇒ U(20) = 0,30
b) ⇒ U(30) = 0,40
c) ⇒ U(60) = 0,75
d) ⇒ U(80) = 0,95

es ist keine Nutzenfunktion gegeben
⇒ Befragung ⇒ subjektive Werte

<u>3. Schritt: NEW</u>
$NEW(a_1) = U(100) \times 0{,}35 + U(20) \times 0{,}5 + U(30) \times 0{,}15$
$= 1 \times 0{,}35 + 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}15$
$= 0{,}56$

$NEW(a_2) = 0{,}7375$

⇒ $NEW(a_2) > NEW(a_1)$ ⇒ a_2 ist zu wählen !

4.2.2.3.2 Entscheidung durch sukzessives Anwenden der Axiome rationalen Verhaltens (Luce / Raiffa)

<u>1. Axiom: ordinales Prinzip</u>

→ Ordnungsaxiom $e_i \succsim e_j$ oder $e_j \angle e_j$ oder $e_i \sim e_j$

→ Transitivitätsaxiom $e_i \succsim e_j$ und $e_j \succsim e_k$ folgt: $e_i \succsim e_k$

im Beispiel: 100 > 80 > 60 > 30 > 20 > 0

<u>2. Axiom: Stetigkeitsprinzip</u>

Gegeben seien ein (sicheres) Ergebnis e_j und die BRL (e_{max}; p; e_{min}) mit $e_{min} > e_j > e_{min}$. Dann gibt es eine Indifferenzwahrscheinlichkeit p*, so dass der Entscheidungsträger indifferent ist zwischen dem sicheren Ergebnis und der Lotterie.
$e_j \sim (e_{max}; p^*; e_{min})$

p* beeinflusst, wo „~“ liegt

Stetigkeit bedeutet, dass es in der Wertschätzung des Entscheidungsträgers keine Sprünge gibt

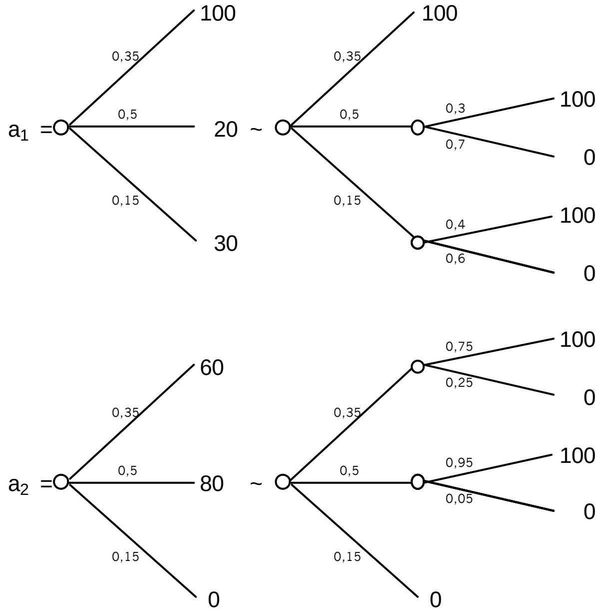
Übergang vom Vorziehen des sicheren Ergebnisses zum Vorziehen der Lotterie vollzieht sich fließend ⇒ keine Sprünge ⇒ steige Veränderung

im Beispiel: e_j = 20 ~ BRL mit p* = 0,30
e_j = 30 ~ BRL mit p* = 0,40
e_j = 60 ~ BRL mit p* = 0,75
e_j = 80 ~ BRL mit p* = 0,95

3. Axiom: Substitutionsprinzip

In einer Lotterie kann ein Ergebnis e_{ij} durch die äquivalente BRL ersetzt werden, so dass der Entscheidungsträger zwischen der ursprünglichen und der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeitsverteilung indifferent ist.

im Beispiel:



4. Axiom: Reduktionsprinzip

der 2-stufige Baum wird auf einen 1-stufigen reduziert

Der Entscheidungsträger ist indifferent zwischen einer zusammengesetzten Lotterie und einer einfachen Lotterie, sofern jedes Ergebnis der beiden Lotterien dieselbe Eintrittswahrscheinlichkeit besitzt.

im Beispiel: a_1': $P(100) = 0{,}35 + 0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}15 \times 0{,}4 = 0{,}56$
$P(0) = 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}15 \times 0{,}6 = 0{,}44$

a_2': $P(100) = 0{,}35 \times 0{,}75 + 0{,}5 \times 0{,}95 = 0{,}7375$
$P(0) = 0{,}35 \times 0{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2625$

5. Axiom: Monotonieprinzip

Eine Lotterie $L_1 = (e_{max};\ p_1;\ e_{min})$ wird einer zweiten Lotterie $L_2 = (e_{max};\ p_2;\ e_{min})$ genau dann vorgezogen oder als gleichwertig angesehen, wenn $p_1 \geq p_2$ (stochastische Dominanz) gilt.

im Beispiel: $a_2 \succsim a_1$, weil 0,7375 > 0,56

6. Axiom: Transitivitätsprinzip bzgl. der Handlungsalternativen

$a_i \succsim a_j$ und $a_j \succsim a_k$ folgt $a_i \succsim a_k$

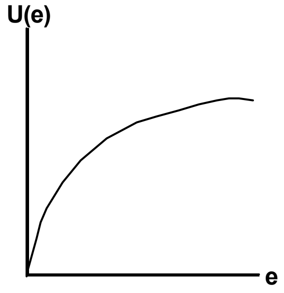
im Beispiel: $a_1 \sim a_1'$, $a_2 \sim a_2'$ $\Rightarrow$ $a_2 \succsim a_1$, da $a_2' \succsim a_1'$

4.2.2.4 RNF und Risikoeinstellung

Positiv bewertete Sachverhalte (z.B. Gewinn: „mehr Gewinn ist besser als weniger Gewinn“)
⇒ RNF: streng monoton steigend

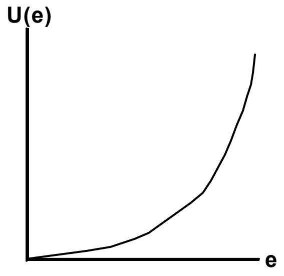
$\frac{dU}{de} > 0$ (= 1. Ableitung der RNF)

a) bei Risikoaversion: $\frac{d^2U}{de^2} < 0$



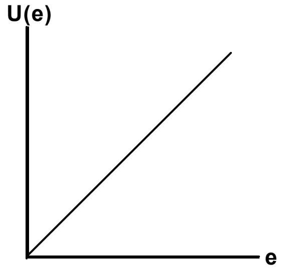
⇒ RNF ist *degressiv* steigend (Grenznutzen nimmt ab)

b) bei Risikofreude: $\frac{d^2U}{de^2} > 0$



RNF ist *progressiv* steigend (Grenznutzen nimmt zu)

c) bei Risikoneutralität: $\frac{d^2U}{de^2} = 0$



RNF ist *linear* steigend

Beispiel.: Wahl zwischen Lotterie und sicherem Ergebnis
Lotterie: $L = (100; 0{,}5; 16)$
sicheres Ergebnis: $e_s = 58$ = Erwartungswert μ der Lotterie

Risikoaversion des Entscheidungsträgers
Nutzenfunktion $U(e) = \sqrt{e}$

$$\phi\,(\text{Lotterie}) = \sqrt{100} \times 0{,}5 + \sqrt{16} \times 0{,}5 = 5 + 2 = 7$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P_j \times U(e_{ij})$$

$$\phi\,(\text{sicheres Ergebnis}) = U(58) = \sqrt{58} \times 1 = 7{,}6$$

$\Rightarrow$ 7,6 > 7 $\Rightarrow$ der risikoscheue Entscheidungsträger zieht das sichere Ergebnis bei gleichem Erwartungswert der Lotterie vor.

$$U(\mu) > \sum_{j=1}^{n} P_j \times U(e_{ij})$$

$$U(e_{SÄ}) \sim \sum_{j=1}^{n} P_j \times U(e_{ij})$$

Bestimmung des Sicherheitsäquivalents in Beispiel:

$$\sqrt{e_{(SÄ)}} = 0{,}5 \times \sqrt{100} + 0{,}5 \times \sqrt{16}$$
$$= 7 \quad |\ (\,)^2$$
$$e_{(SÄ)} = 49$$

das Sicherheitsäquivalent ist das sichere Ergebnis, wo der Entscheidungsträger zwischen der Lotterie und dem sicheren Ergebnis indifferent ist
$\Rightarrow$ den Nutzen des SÄ mit dem Nutzen der Lotterie (=7) gleichsetzen !

$e_{SÄ} < \mu$
$\mu - e_{SÄ}$ = Risikoprämie

Beispiel: $49 < 58 \quad | -49$
$0 < 58-49$
$0 < 9$

das Sicherheitsäquivalent ist immer kleiner als der Erwartungswert der Lotterie (Sicherheit muss erkauft werden)

4.2.3 Vereinbarkeit von $\mu\sigma$-Prinzip und Bernoulli-Prinzip

$\mu\sigma$-Prinzip: einfach
Bernoulli-Prinzip: als rational akzeptiert
} $\Rightarrow$ Vorteile beider Prinzipien vereinen

$\Rightarrow$ Kombination von Einfachheit ($\mu\sigma$-Prinzip) und Rationalität (Bernoulli)

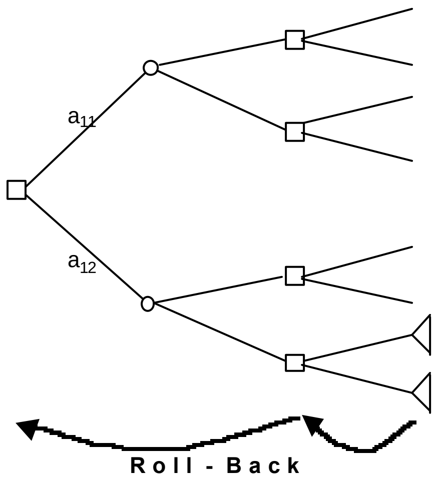
Bedingungen für die Vereinbarkeit:
- quadratische RNF oder
- normalverteile Ergebnisgröße

$$U_{(e)} = a \times e^2 + b \times e$$

$$E[U_{(e)}] = a \times \underbrace{(\sigma^2 + \mu^2)}_{\text{Varianz aus } \mu\sigma\text{-Prinzip}} + b \times \mu$$

Erwartungs-nutzen

4.2.4 sequentielle Entscheidungen



„Pferd von hinten aufzäumen“

Ziel: Auffinden der optimalen mehrstufigen Alternative / Strategie

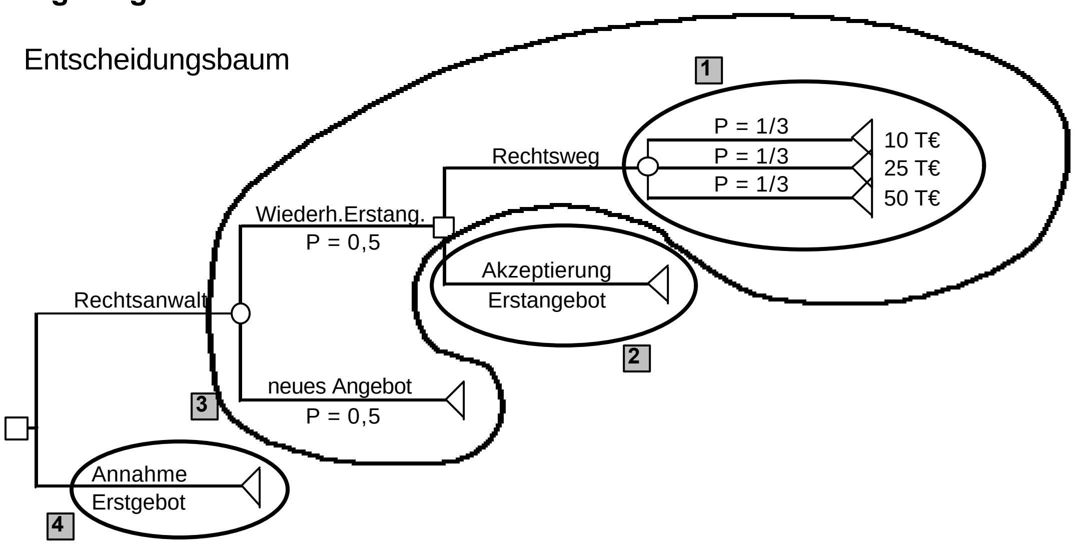
Roll-Back-Verfahren:

1. Bewertung der Konsequenzen mittels Nutzenfunktion
2. ausgehend von den Konsequenzen begibt man sich zum nächsten vorgelagerten Entscheidungspunkt
3. Berechnung des Entscheidungsnutzen (EU) aller Alternativen an diesem Punkt
4. Verfolgung nur der Alternative mit dem höchstem Entscheidungsnutzen; Eliminierung aller anderen Alternativen
5. am ersten Entscheidungspunkt steht die optimale Strategie mit höchstem EU

Voraussetzung: Unabhängigkeit
Kritik: es bleibt nur die beste Alternative; keine Reihenfolge möglich

Übungsaufgabe 10: Roll-Back-Verfahren

a) Entscheidungsbaum



b) Strategie (vollständige Handlungsanweisung)

Strategie 1: Annahme Erstangebot (a_1)
Strategie 2: Rechtsanwalt (a_2)
- wenn Wiederholung Erstangebot $\Rightarrow$ akzeptieren

Strategie 3: Rechtsanwalt (a_3)
- wenn Wiederholung Erstangebot $\Rightarrow$ Rechtsweg } optimale Strategie

c) optimale Strategie (Nutzenfunktion: $U(e) = \sqrt{\frac{e}{50.000}}$; e = Höhe der Entschädigung)

$$\left.\begin{array}{l} \text{bei } e = 50.000: \; U(e) = \sqrt{\frac{50.000}{50.000}} = 1,0 \\ \text{bei } e = 25.000: \; U(e) = \sqrt{\frac{25.000}{50.000}} = 0,7071 \\ \text{bei } e = 10.000: \; U(e) = \sqrt{\frac{10.000}{50.000}} = 0,4472 \end{array}\right\} \text{(in alle Endpunkte übertragen)}$$

$\boxed{1}$ NEW = 0,4472 × 1/3 + 0,7071 × 1/3 + 1 × 1/3 = 0,7181

$\boxed{2}$ NEW = = 0,4472

$\boxed{3}$ NEW = 0,7181 × 0,5 + 0,7071 × 0,5 = 0,7126

$\boxed{4}$ NEW = 0,4472 × 1/3 + 0,7071 × 1/3 + 1 × 1/3 = 0,4472

5. Portefeulle-Auswahl als Anwendungsfall

5.1 Problemstellung und Annahmen

Aktie versus Aktienfonds
Prämissen:
- risikoscheuer Investor
- risikobehaftete Anlage
- $\mu\sigma$-Prinzip
- auf 2-Zeitpunkt-Betrachtung beschränkt
  - t_0 : voll investiert
  - t_1 : voll liquidiert
- beliebige Teilbarkeit der Wertpapiere
- keine Steuern, keine Transaktionskosten
- 2 Wertpapiere

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \text{Anteil } WP_1 \\ x_2 = \text{Anteil } WP_2 \end{array}\right\} \quad x_1 + x_2 = 1$$

5.2 Rendite und Risiko von Aktienportfolios

r_{ij} = Rendite des WP „i“ im Zustand „j“
P_j = Wahrscheinlichkeit für Zustand j

Rendite und Risiko bei *einer* Aktie:

EW der Rendite:

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} P_j \times r_{ij}$$

Standardabweichung: der Rendite

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} P_j (r_{ij} - \mu_i)^2}$$

Rendite und Risiko bei *zwei* Aktien:

EW des Portfolios

$\mu_P = x_1 \times \mu_1 + x_2 \times \mu_2$

$\sigma_P = \sqrt{x_1^2 s_1^2 + x_2^2 s_2^2 + 2x_1 x_2 \underbrace{Cov_{12}}_{\text{Risikoverbund}}}$

Das Risiko einer Aktie darf nicht isoliert betrachtet werden, sondern im Verbund, d.h. wie sie risikomäßig zueinander stehen und sich gegenseitig beeinflussen.

$\frac{Cov_{12}}{\sigma_1 \times \sigma_2}$ = Korrelationskoeffizient ρ_{12} („Rho“)

wobei immer gilt: $-1 \leq \rho \leq +1$

1) $\rho_{12} > 0$ (positive Korrelation)

wenn $\rho_{12} = 1$, dann sind die Aktien absolut gleichläufig

„wenn Rendite von Aktie 1 steigt, steigt auch die Rendite von Aktie 2“

2) $\rho_{12} < 0$ (negative Korrelation)
„wenn Rendite von Aktie 1 steigt, sinkt die Rendite von Aktie 2“

Ergebnis:
1. Durch Mischung kann Portfolio-Risiko gegenüber dem gewogenen Durchschnitt der Einzelrisiken reduziert werden (=“Diversifikation“)
2. effizienter Rand
   Effizienz gemäß $\mu\sigma$-Kriterium

Merke: durch Mischung kann Risiko reduziert werden !