

## Martens: Übungen in der Betriebswirtschaftslehre, #6 (Investitionsplanung)

15.12.2006

Forts.

### 3.5 Der interne Zinsfuß als Beurteilungskriterium

#### 3.5.1 Definition, Ermittlung und Interpretation

Vier **Sonderfälle**, die leicht zu berechnen sind

- $-a_0, a_T$  bei  $T > 1$   
Suche nach dem Kapitalwert, den man dann Null setzt und nach internem Zinsfuß auflöst:  
nach Kapitalwertformel

$$-a_0 + a_T \cdot (1+i^*)^{-T} = 0$$

$$\frac{a_T}{a_0} = (1+i^*)^T$$

$$i^* = \sqrt[T]{a_T/a_0}$$

z.B. Autokauf heute mit nachfolgendem Verkauf nach 10 Jahren

- $-a_0$ , endliche Reihe gleichhoher EZÜ  $a_T$ , also T Jahre eine nachschüssige Rente

$$-a_0 + a \cdot \text{RBF}(i^*, T) = 0$$

$$\frac{a_0}{a} = \text{RBF}(i^*, T)$$

⇒ interner Zinsfuß ist näherungsweise aus Tabelle zu ermitteln

- $-a_0, a, a, \dots, a_0 + a$

$$-a_0 + a \cdot \text{RBF}(i^*, T) + a_0 \cdot (1+i^*)^{-T} = 0$$

$$-a_0 + a \cdot \frac{(1+i^*)^T - 1}{i^* \cdot (1+i^*)^T} + \frac{a_0}{(1+i^*)^T} = 0$$

$$a \cdot \frac{(1+i^*)^T - 1}{i^* \cdot (1+i^*)^T} = -\frac{a_0}{(1+i^*)^T} + a_0 \cdot \frac{(1+i^*)^T}{(1+i^*)^T}$$

$$\frac{a}{i^*} \cdot \frac{(1+i^*)^T - 1}{(1+i^*)^T} = -a_0 \cdot \frac{(1+i^*)^T - 1}{(1+i^*)^T}$$

$$i^* = \frac{a}{a_0}$$

z.B. bei manchen Finanzanlagen, bei denen man regelmäßig Zinsen bekommt und am Ende der Eingangsbetrag dazu ausbezahlt wird

- $-a_0$ , ewige Rente<sup>1</sup> bei nachschüssiger Zahlung

$$-a_0 + \frac{a}{i^*} = 0$$

$$i^* = \frac{a}{a_0}$$

spielt z.B. bei Unternehmensbewertungen eine Rolle

### Beispiele

- | t | a(t) |
|---|------|
| 0 | -100 |
| 1 | 50   |
| 2 | 40   |
| 3 | 30   |
| 4 | 20   |

 erster Versuch:  $i^* = 10\%$   
 $\Rightarrow$  KW = 31,24  $\rightarrow$  i. Z. muß größer 10% sein  
 zweiter Versuch:  $i^* = 20\%$   
 $\Rightarrow$  KW = -3,55  $\rightarrow$  i. Z. muß kleiner 20% sein  
 Lösung:  $i^* = 17,8\%$   
 $\Rightarrow$  KW = 0

### Interpretation des internen Zinsfußes

- **Bei Fremdfinanzierung**  
 handelt es sich beim internen Zinsfuß um denjenigen Kreditzinssatz, bei dessen Anrechnung die EZÜ' gerade ausreichen, nur den Kredit zu tilgen und zu verzinsen.

Der **interne Zinsfuß** stellt immer einen **kritischen Wert** dar, da das Projekt dabei an der Schwelle zur Rentabilität steht.

Beispiel:  
 $i = 17,8\%$

t	0	1	2	3	4
a(t)	-100	50	40	30	20
Kreditzins		-17,80	-12,07	-7,10	-3,02
Saldo		33,20	29,93	25,90	20,98
Tilgung		33,20	29,93	25,90	20,98
Kreditstand		67,80	39,88	16,98	0,00

- **Bei Eigenfinanzierung**  
 gibt der interne Zinsfuß denjenigen Anlagezinssatz an, den die Alternativanlage maximal erzielen darf, ohne daß das Projekt unvorteilhaft wird.

Beispiel:

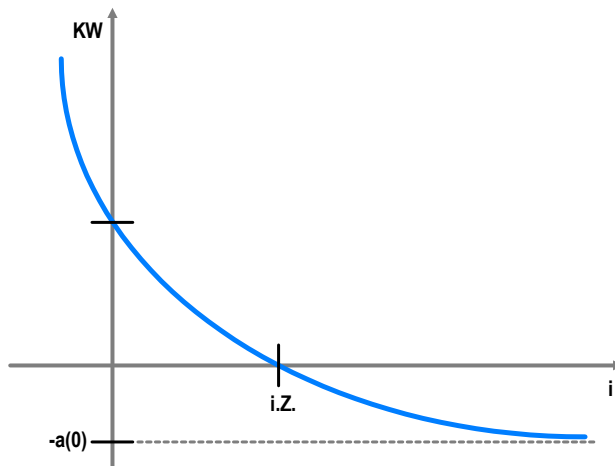
t	0	1	2	3	4
a(t)	-100	50	40	30	20
kalkulatorische Zinsen auf gebundenes Kapital		-17,80	-12,07	-7,10	-3,02
Kapitalfreisetzung		33,20	29,93	25,90	20,98
Tilgung		33,20	29,93	25,90	20,98
Kapitalbindung		67,80	39,88	16,98	0,00

<sup>1</sup> Rentenwert ohne Laufzeitbegrenzung

### 3.5.2 Kapitalwertfunktion

- Der KW ist abhängig von der Höhe des Kalkulationszinsfußes. Spezialfall:  $i = 0\% \rightarrow KW = \sum_{t=0}^T a_t$ . Die **Kapitalwertfunktion** stellt den Zusammenhang zwischen dem Kalkulationszinsfuß und dem Kapitalwert dar. Im Mittelpunkt stehen **Normalinvestitionen**, bei denen es immer einen eindeutigen internen Zinsfuß gibt. Die Prämissen einer Normalinvestition sind:

- $\sum_{t=0}^T a_t > 0$  (impliziert  $i = 0\%$ )
  - ⇒ die Kapitalwert-Funktion **beginnt im positiven Bereich**
- Die erste Zahlung  $a_0$  ist negativ.
  - ⇒ ab irgend einem Kalkulationszinsfuß läuft die **Kapitalwertfunktion im negativen Bereich**
- Die **Kapitalwertfunktion fällt monoton**.<sup>2</sup>
  - ⇒ es existiert nur **ein interner Zinsfuß**



Die **Zulässigkeit** der **Verwendung** des **internen Zinsfuß** ist unbedingt vor dem Einsatz zu **prüfen!**

Anderenfalls z.B. mit dem Kapitalwert arbeiten.

#### Prüfung der Monotonie

- es gibt **einen Vorzeichenwechsel** in der Zahlungsreihe:
  - z.B. - + + + + ...
  - z.B. - - - + + ...
- es handelt sich um eine „**reguläre Investition**“: Berechnung der „**Projektstände**“  $S_t$  bei einem Kalkulationszinsfuß  $i = 0$ ; man addiert also alle

t	0	1	2	3	4	5	6
a(t)	-200	100	60	-70	150	80	30
		↘ ↙	↘ ↙	↘ ↙			
		VZW	VZW	VZW			
S(t)	-200	-100	-40	-110	40	120	150
				↘ ↙			
				VZW			

Elemente auf und reduziert so für die Betrachtung die Vorzeichenwechsel – verbleibt dann nur noch **ein VZW**, ist die Funktion **monoton fallend**

### 3.5.3 Entscheidungsregeln

#### 3.5.3.1

##### Entscheidung über ein einzelnes Investitionsprojekt

- Gesucht ist eine **Entscheidungsregel** auf Basis des **internen Zinsfußes**, die ein Projekt genau dann als **vorteilhaft** ausweist, wenn sein **Kapitalwert positiv** ist.
  - ⇒ KW ist positiv, wenn i. Z. größer dem Kalkulationszinsfuß ist:
    - $i^* < i \rightarrow$  Projekt unterlassen
    - $i^* = i \rightarrow$  Indifferenz
    - $i^* > i \rightarrow$  Projekt durchführen

<sup>2</sup> Eine Funktion oder Folge heißt **monoton fallend**, wenn sie nur kleiner wird oder konstant bleibt. Wird sie nur größer oder bleibt konstant ist sie monoton steigend. **Streng monoton** steigend (bzw. streng monoton fallend) sind Funktionen oder Folgen, die nur größer (kleiner) werden, jedoch nicht konstant sind.

- **Hinreichende Bedingungen**, damit ein Projekt **genau einen i. Z.** hat:

- **Normalinvestition**

- z.B.  $\{-100; -30; 40; 70; 50\}$  bei  $i=10\%$ 
  - ⇒  $i^* = 0,0765$
  - ⇒ KW negativ
  - ⇒ Projekt ablehnen

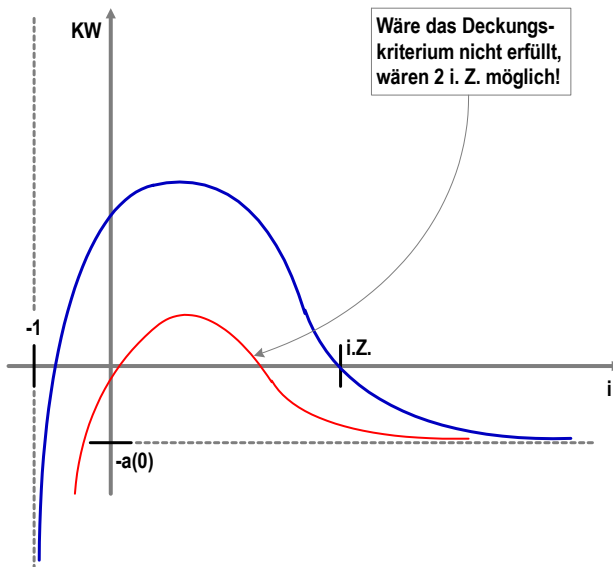
- **reguläre Investition**

- z.B.  $\{-70; -40; 50; -10; 80; 60; -30\}$  bei  $i=10\%$ 
  - ⇒  $S_t \{-70; -110; -60; -70; 10; 70; 40\}$
  - ⇒ nur mehr 1 VZW und positiver Projektstand
  - reguläre Investition, i. Z. anwendbar
  - ⇒  $i^* = 0,1082 > i = 10\%$
  - ⇒ Projekt durchführen
  - ⇒ auch:  $KW = 0,41$
  - da KW positiv ist Durchführung ebenfalls anzuraten

Andere mögliche **Definition** für eine **reguläre Investition**:

Bis zum Zeitpunkt  $\tau$  wird Kapital gebunden, anschließend freigesetzt und zwar so, daß über die ganze Lebensdauer ein positiver Betrag freigesetzt wird.  
 ⇒ im Beispiel  $S_\tau = 40$

- **Zahlungsreihe mit 2 VZW, negativen Zahlungen zu Beginn und Erfüllung des Deckungskriteriums<sup>3</sup>**



z.B. bei Investitionen mit Entsorgungsproblemen wie es bei Kraftwerken der Fall ist: es gibt eine Anfangsinvestitionen  $a_t < 0$  für  $t=0, \dots, \bar{t}$  gefolgt von langer Zeit mit positiven Zahlungen  $EZÜ$   $a_t > 0$  für  $t = \bar{t}+1, \dots, \hat{t}$  und schließlich die Zeit der Entsorgung  $a_t < 0$  für  $t = \hat{t}+1, \dots, T$ .

Beachte:

- ⇒ strebt  $i$  gegen  $-1$  so strebt der KW gegen  $-\infty$
- ⇒ strebt  $i$  gegen  $+\infty$  so bekommt die Anfangsauszahlung zunehmend Gewicht und der KW strebt gegen die Anfangsauszahlung  $-a_0$

<sup>3</sup> **Deckungskriterium** ist die positive Summe  $\sum_{t=0}^T a_t > 0$  bei  $i = 0\%$

### 3.5.3.2

#### Entscheidung über einander ausschließende Investitionsprojekte

- Nach dem Kapitalwert ist eine Entscheidungsregel definiert: wähle dasjenige Projekt mit dem höchsten KW. Gesucht ist eine Regel für die Anwendung des i. Z., die dazu kompatibel ist.

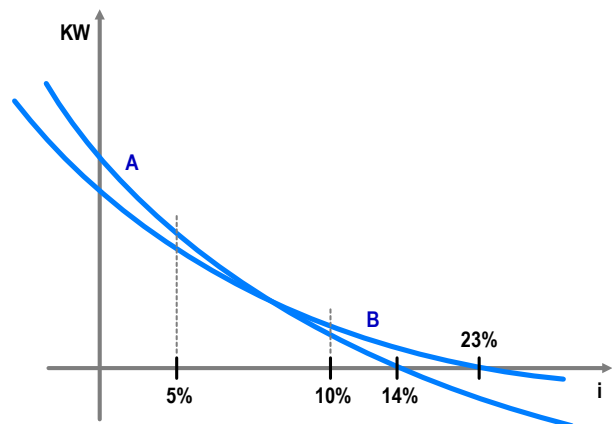
Beispiel:

t	0	1	2	3
A	-100	20	30	90
B	-80	60	40	10

Der interne Zinsfuß der beiden alternativen Projekte liegt bei  $i_A^* = 0,1464$  und  $i_B^* = 0,2362$ .

Demnach *scheint* auf den ersten Blick wegen  $i_B^* > i_A^*$  das Projekt B vorteilhafter. Betrachtet man aber die Kapitalwerte, so ergibt sich:

- ⇒ bei  $i = 10\%$  gilt:  $KW_A = 10,59$  und  $KW_B = 15,12$  →  $KW_B > KW_A$
- ⇒ bei  $i = 5\%$  gilt:  $KW_A = 24,00$  und  $KW_B = 22,06$  →  $KW_B < KW_A$



Es besteht ein Unterschied in der Aussage des i. Z. und des KW-Kriteriums, wenn der verwendete Kalkulationszinsfuß kleiner als der „**kritische Zinssatz**“, also dem **Schnittpunkt** der beiden **Kapitalwertkurven**, ist (vgl. Grafik); dort gilt:  $KW_A > KW_B$  und  $i_A^* < i_B^*$  (↔).

Die Entscheidung auf Basis eines Vergleichs der internen Zinsfüße zweier Projekte **weicht** genau dann von der **Kapitalwert-Regel** ab, wenn sich die **KW-Kurven** beider Projekte **schneiden**.

- ⇒ dann ist für unterschiedliche Kalkulationszinsfüße einmal der Kapitalwert von Projekt A und einmal der Kapitalwert von Projekt B höher

#### Ist dennoch ein sinnvoller Vergleich möglich?

Es ist die **Differenzinvestition** zu bilden, die dann eine (virtuelle) Einzelinvestition darstellt, zu der sich dann eine Aussage anhand des i. Z. treffen läßt. Da „B-A“ keine negative Anfangsauszahlung hätte ist diese Differenzbildung nicht sinnvoll und es ist stattdessen „A-B“ zu bilden.

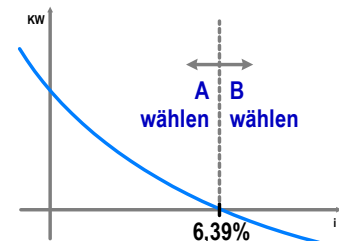
t	0	1	2	3
A	-100	20	30	90
B	-80	60	40	10
A-B	-20	-40	-10	90

#### Beurteilung der Differenzinvestition anhand des Kapitalwerts:

- ⇒  $KW_{A-B}(5\%) = 1,94$  → „A ist besser als B“
- **relative Vorteilhaftigkeit** und daher *keine* Aussage, ob A vorteilhaft ist
- A ist ggü. B vorzuziehen, da „A-B“ vorteilhaft ist
- ⇒  $KW_{A-B}(10\%) = -4,52$  → „B ist ggü. A vorzuziehen, da „A-B“ nicht vorteilhaft ist“

#### Beurteilung der Differenzinvestition anhand des internen Zinsfuß’:

- ⇒ Ist es eine **Normalinvestition**?
  - $\sum a_t = 10 > 0$  ✓
  - $a_0 < 0$  ✓
  - *Ein Vorzeichenwechsel* ✓
- ⇒  $i_{A-B}^* = 0,0639$  ergo ergibt sich konsistent zur Kapitalwert-Regel:
  - $i < i_{A-B}^*$  (= positiver KW Differenzinvestition)
    - A ist vorzuziehen (z.B. bei  $i = 5\%$ )
  - $i > i_{A-B}^*$  (= negativer KW der Differenzinvestition)
    - B ist vorzuziehen (z.B. bei  $i = 10\%$ )



• **Wichtig**

1. Eine der hinreichenden Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit des internen Zinsfußes muß für die Differenzinvestition sein

⇒ insbesondere muß die Differenz immer so gebildet werden, daß die **Differenzinvestition** mit einer **negativen Auszahlung beginnt**

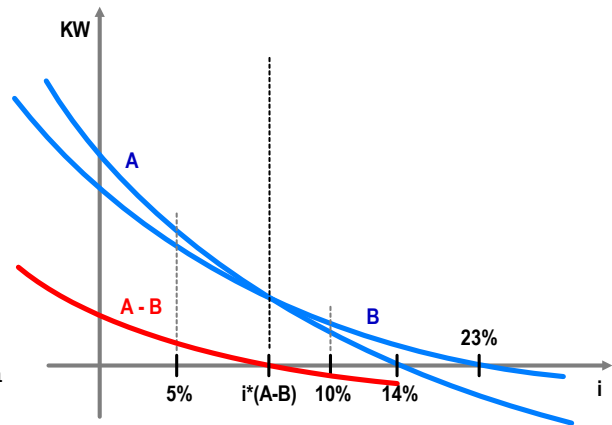
2. Die Differenzinvestition beschreibt nur den Wechsel von einem Projekt zum anderen

⇒ also wird nur die **relative Vorteilhaftigkeit** beschrieben, nicht die absolute Vorteilhaftigkeit

→ ergo: bei relativer Vorteilhaftigkeit von A muß A nochmals (isoliert) einzeln geprüft werden, ob es vorteilhaft ist (Vergleich interner Zinsfuß und Kalkulationszinsfuß)

3. Bei z.B. drei (oder mehr) Projekten funktioniert es auch, indem man die Bewertung von Differenzinvestitionen kaskadiert: Prüfung dreier Projekte A, B, C durch Bewertung der Differenzinvestition A-B, wenn dann A besser ist → Überprüfung von A-C.

4. Eine **allgemeingültige Entscheidungsregel** für Anwendung des i. Z. als Beurteilungskriterium **kann nicht definiert werden.**



• **Übung**

Gegeben seien Projekt A {-200; 268}  
Projekt B {-200; 268}

a) **Kapitalwertvergleich** bei  $i = 10\%$  und  $i = 30\%$

nach  $KW = -200 + 268 \cdot (1+i)^{-1}$  ergibt sich  $KW_A(10\%) = 43,64$  /  $KW_A(30\%) = 6,15$   
und  $KW = -180 + 290 \cdot (1+i)^{-1}$  ergibt sich  $KW_B(10\%) = 83,64$  /  $KW_B(30\%) = 43,08$   
⇒ **B** weist in beiden Fällen einen **höheren Kapitalwert** auf und ist vorzuziehen

b) Vergleich durch den **internen Zinsfuß**

$i_A^* = 0,34$

$i_B^* = 0,61$

⇒ **B** weist einen **höheren internen Zinsfuß** auf

**B dominiert A.** Darum ist nur noch über die Vorteilhaftigkeit von B alleine zu entscheiden, ob das Projekt durchgeführt werden soll oder nicht.

