# Martens: Übungen in der Betriebswirtschaftslehre, #6 (Investitionsplanung)

## 27.10.2006

**Forts.**

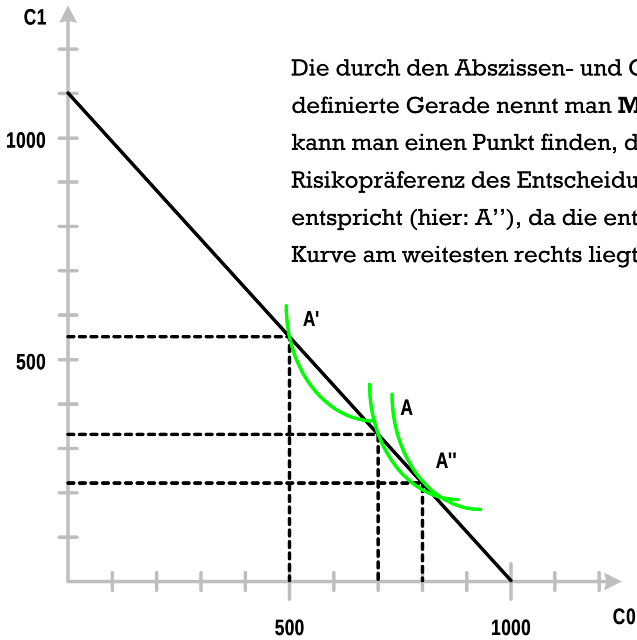
**2 Grundlagen von Investitionsentscheidungen**

**2.5 Verzinsungserfordernisse der Investition**

**2.5.1 Zins als Entgelt für intertemporalen Tausch**

- Der **vollkommene Kapitalmarkt** ist definiert durch die Eigenschaften:
  - Möglichkeiten der **Geldanlage** und **Kreditaufnahme** sind **unbegrenzt**
    - ⇒ durch Ergänzungsinvestitionen („Verschieben“ des Verhältnisses gegenwärtigen und zukünftigen Konsums) ist jede beliebige Präferenz abbildbar
  - der **Sollzinssatz** ist **gleich** dem **Habenzinssatz**
  - es besteht eine **atomistische Marktstruktur** („Mengenanpasserverhalten“)
    - ⇒ der Einzelne beeinflußt durch seine Transaktionen nicht den Gesamtmarkt
  - der Markt ist **friktionslos**
    - ⇒ keine Transaktionskosten, keine Steuern
- An nebenstehenden Beispieltransaktionen erkennt man, daß man durch Ergänzungsinvestitionen und -anlagen jede beliebige Position zwischen vollständigem Konsum in der Gegenwart und vollständigem Konsum nach einer Periode erreichen kann (hier im Beispiel bei $i = 10\%$).

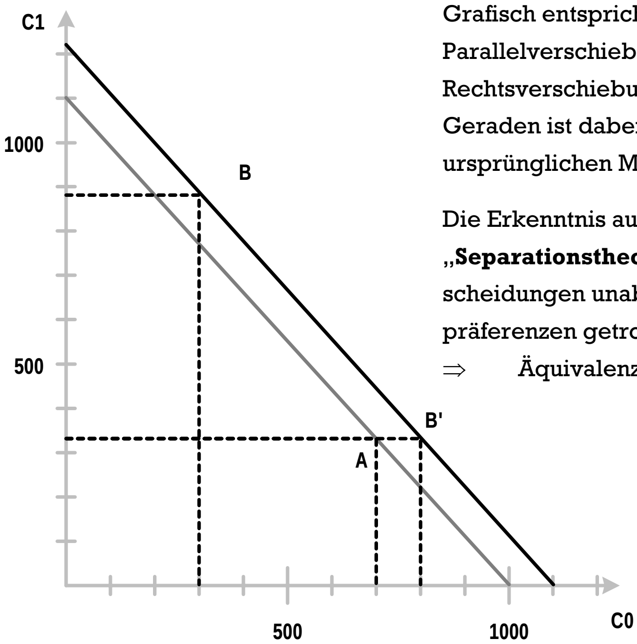
| | C(0) | C(1) |
|---|---|---|
| Pos. A | 700 | 330 |
| Geldanlage (=Ergänzungsinvestition) | -200 | 220 |
| Pos. A' | 500 | 550 |
| Kreditaufnahme (=Ergänzungsfinanzierung) | 100 | -110 |
| Pos. A" | 800 | 220 |




Die durch den Abszissen- und Ordinaten-Schnittpunkt definierte Gerade nennt man **Marktgerade**. Auf ihr kann man einen Punkt finden, der der jeweiligen Risikopräferenz des Entscheidungsträgers am besten entspricht (hier: A’’), da die entsprechende Indifferenz-Kurve am weitesten rechts liegt.

Bei nebenstehendem Beispiel der Überführung von Pos. A durch Investition (beachte die Terminologie: keine *Ergänzungs*investition) und Kreditaufnahme nach Pos. B’ erkennt man, daß sich eine **Dominanzbeziehung** ergibt, sodaß jeder unabhängig von seiner Risikopräferenz Pos. B’ der Pos. A vorziehen würde: die Konsummöglichkeiten nach einer Periode unterscheiden sich nicht, aber in der Gegenwart wären sie 100 höher.

| | C(0) | C(1) |
|---|---|---|
| Pos. A | **700** | **330** |
| Investition | **-440** | **550** |
| Pos. B | **300** | **880** |
| Kreditaufnahme | **500** | **-550** |
| Pos. B' | **800** | **330** |




Grafisch entspricht die Änderung der Position einer Parallelverschiebung der Marktgeraden, i.d.F. einer Rechtsverschiebung. Jeder Punkt auf dieser neuen Geraden ist dabei günstiger als ein Punkt auf der ursprünglichen Marktgeraden.

Die Erkenntnis aus diesen Überlegungen entspricht dem „**Separationstheorem**“[1], demzufolge Investitionsentscheidungen unabhängig von den individuellen Zeitpräferenzen getroffen werden können.

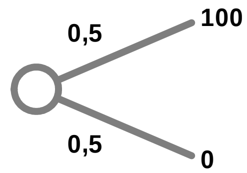
⇒ Äquivalenz von Marktwert und Nutzenmaximierung

Es gibt also **keine** durch individuelle Präferenzen bedingte **Delegationsprobleme**, da die Marktwertfindung unabhängig ist von persönlichen Präferenzen.

### 2.5.2 Zins als Entgelt für Risikoübernahme

- Der **Zins** als **Prämie** für das Risiko bezieht sich nicht auf das möglicherweise vorhandene gegen die Interessen des Investors gerichtete Tun des Geldnehmers (Principal-Agent-Thematik, u.a. nach Akerlof), sondern das rein **wirtschaftliche Risiko**. Es wird also **sicheres Geld** gegen einen **unsicheren Zahlungsanspruch** getauscht, – dafür ist eine Prämie zu zahlen.
- **Risikoscheu** (risikoavers) zu sein bedeutet nicht, kein Risiko eingehen zu wollen; vielmehr wird ein **hohes Entgeld gefordert** für das Eingehen eines Risikos.
- Unter der Prämisse, daß der betroffene ET risikoavers (der Normalfall) ist, seien folgende Situationen betrachtet:

  Bei einer Lotterie[2] seien die Wahrscheinlichkeiten gleich verteilt, 100 GE oder 0 GE zu erhalten. Als Alternative zur Teilnahme werde




[1] Das **Fisher-Separationstheorem** aus dem Jahr 1930, benannt nach dem Ökonomen Irving Fisher, besagt, dass bei vollkommenen und vollständigen Kapitalmärkten die Produktionsentscheidung (Investitionsentscheidung) nur durch die objektiven Marktkriterien bestimmt wird, während die subjektiven Präferenzen, die in die Konsumentscheidung des Individuums eingehen, keine Berücksichtigung finden. Dieses begründet sich darauf, dass die subjektiven Präferenzen nur im Hinblick auf eine Konsumentscheidung relevant sind, die optimale Investitionsentscheidung jedoch vollkommen unabhängig sowohl von den Konsumpräferenzen als auch von dem Anfangskapital des Investors ist. Folgerung: Durch den Wegfall der subjektiven Präferenzen folgt automatisch, dass das oberste Unternehmensziel die Maximierung des Unternehmenswertes ist. Dieses Prinzip ist heute unter dem Namen Shareholder Value bekannt. Aus der Fisher-Separation lässt sich auch folgende Aussage ableiten: die individuellen Zeitpräferenzen spielen keine Rolle bei der Bestimmung des Zinssatzes. [wikipedia]

[2] In der Entscheidungstheorie ist die **Lotterie** ein gedankliches Konstrukt, um die Möglichkeit einer unsicheren zukünftigen Auszahlung modellieren zu können. Dabei wird häufig angenommen, dass eine spätere Auszahlung an einen Entscheider von einem Umweltzustand abhängt, der zum Zeitpunkt der Entscheidung noch unbekannt ist und auch nicht vom Entscheider beeinflusst werden kann. In der Regel macht man aber Annahmen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Höhe der Auszahlung. Die Höhe der künftigen Auszahlung kann je nach Anwendung verschiedenen Verteilungen folgen. Im einfachsten Fall reicht eine künftige Auszahlung, die mit einer Wahrschein-

dem ET angeboten, 50 GE sicher zu erhalten.

Der **Erwartungswert** der Lotterie beträgt $EW(\text{Lotterie}) = \mu = 50$. Das sichere Ergebnis ist $e_S = 50$. Der Nutzen (engl. **U**tility) für einen risikoaversen ET wird beim sicheren Ergebnis größer sein $U(\text{Lotterie}) < U(e_S)$ und er wird sich gegen die Lotterie entscheiden.

- Das **Sicherheitsäquivalent** (SÄ) ist dasjenige **sichere Ergebnis**, das für den Entscheider den gleichen Nutzen stiftet wie die Lotterie. Dann gilt $U(\text{Lotterie}) = U(\text{SÄ})$.
  $\Rightarrow$ im Beispiel könnte also gelten: $\text{SÄ} = 40 < \mu = 50$
  Die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem Sicherheitsäquivalent $RP = \mu - \text{SÄ} = 50 - 40 = 10$ ist die **Risikoprämie**.

## 3 Verfahren der dynamischen Investitionsrechnung

### 3.1 Grundlagen: Zinseszins- und Rentenrechnung

- es gelte: $q = 1 + i$
  $q^n$ = **Aufzinsungsfaktor**; der Betrag, auf den 1 Euro nach n Jahren anwächst
  $q^{-n}$ = **Abzinsungsfaktor**; der Betrag, der in n Jahren auf 1 Euro anwächst
  Eine **Rente** ist eine **gleichförmige**, **äquidistante Zahlungsreihe**.
  Eine **vorschüssige** Rente ist eine **zu Beginn** der Perioden gezahlte.
  Eine **nachschüssige** Rente ist eine **zum Ende** der Perioden gezahlte.
  $\Rightarrow$ die in der Investitionsrechnung übliche Variante

- Berechnung des **Barwerts** B einer nachschüssigen Rente

**Rentenbarwertfaktor**

**RBF**

$$B = 1 \cdot q^{-1} + 1 \cdot q^{-2} + \ldots + 1 \cdot q^{-(n-1)} + 1 \cdot q^{-n} \qquad (1)$$

Durch Multiplikation mit q ergibt sich:

$$B \cdot q = 1 + q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-(n-2)} + q^{-(n-1)} \qquad (2)$$

Die Differenz beider Terme (2) – (1) ist dann:

$$B \cdot q - B = 1 - q^{-n}$$

$$\Leftrightarrow \quad B(q-1) = 1 - q^{-n}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = {(1 - q^{-n})}/{(q-1)} = {1 - q^{n}}/{i} = {q^n - 1}/{i \cdot q^n}$$

Diese Formel bestimmt den **Rentenbarwertfaktor** RBF. Dabei gilt $B = RBF \cdot \text{Rente}$.

- Der **Endwert** einer nachschüssigen Rente wird über den **Endwertfaktor** EWF bestimmt.

**Endwertfaktor**

**EWF**

Die Formel zur Bestimmung des EWF lautet:

$$EWF = RBF \cdot q^n = {q^n - 1}/{i}$$

- Zur Bestimmung einer n-jährigen Rente, die einem heutigen Betrag von 1 Euro in $t = 0$ äquivalent ist, braucht's den Rentenbarwertfaktor RBF. Dabei gilt ja der Zusammenhang $B = RBF \cdot \text{Rente}$ und damit

**Kapitalwiedergewinnungsfaktor**

**KWF**

$$\text{Rente} = B/RBF$$

Wir können so den **Kapitalwiedergewinnungsfaktor** KWF bestimmen:

$$KWF = {i \cdot q^n}/{q^n - 1}$$

---

lichkeit p niedrig und mit einer Wahrscheinlichkeit (1 – p) hoch ausfällt, um theoretische Fragestellungen wie beispielsweise die Risikoaversion beleuchten zu können. [wikipedia]

**Rückverteilfaktor**

**RVF**

- Um eine Rente zu finden, die einem zukünftigen Vermögen äquivalent ist, braucht's den **Rückverteilfaktor**[3] RVF. Ausgehend vom Endwertfaktor ergibt sich:

  $$EW = Rente \cdot EWF$$

  und damit

  $$Rente = EW / EWF = i / (q^n - 1)$$

**Übungen** (vgl. „martens_06_aufgaben-1_061027.pdf")

- Ü1: $10.000 \cdot 1{,}055^4 = 12.388{,}25$
- Ü2:
  - a) $1.000 / 1{,}05 = 952{,}38$
  - b) $1.000 / 1{,}05^5 = 783{,}53$
  - c) $1.000 / 1{,}05^5 = 783{,}53$ (Ende 5. J. = Anfang 6. J.)
  - d) $1.000 / 1{,}05^{25} = 295{,}30$
- Ü3: $125.000 \cdot i^7 = 225.000$
  $i = 1{,}0876$
- Ü4:
  - a) $5.000 \cdot 1{,}08^n = 5.000 \cdot 2 \Leftrightarrow n = \log(2) / \log(1{,}08) = 9{,}01$
  - b) $5.000 \cdot 1{,}08^n = 5.000 \cdot 3 \Leftrightarrow n = \log(3) / \log(1{,}08) = 13{,}9$
  - c) $5.000 \cdot 1{,}08^n = 5.000 \cdot 4 \Leftrightarrow n = \log(4) / \log(1{,}08) = 18{,}03$
- Ü5: $c_0 = 1.500 \cdot RBF(8\%, 10\,J.)$

  $$c_0 = 1.500 \cdot (1{,}08^{10} - 1) / (0{,}08 \cdot 1{,}08^{10}) = 1.500 \cdot 6{,}71 = 10.065$$
- Ü6: $c_5 = 2.000 \cdot EWF(9\%, 5\,J.)$

  $$c_5 = 2.000 \cdot (q^n - 1) / i = 2.000 \cdot (1{,}09^5 - 1) / 0{,}09 = 11.969{,}42$$
- Ü7: $c_{10} = 50.000 \cdot RVF(7\%, 10\,J.)$

  $$c_{10} = 50.000 \cdot i / (q^n - 1) = 50.000 \cdot 0{,}06582 = 3.291$$
- Ü8: Als **Kapitaldienst** wird die Summe aus Zins und Tilgung bezeichnet. Er ergibt sich zu:

  $$c = 10.000 \cdot KWF(18\%, 5\,J.) = 2.774{,}10$$

  Damit läßt sich der Tilgungsplan aufstellen:

| t | Restwert | Kapital-dienst | Zins | Tilgung |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 10.000,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 1 | 8.425,90 | 2.774,10 | 1.200,00 | 1.574,10 |
| 2 | 6.662,91 | 2.774,10 | 1.011,11 | 1.762,99 |
| 3 | 4.688,36 | 2.774,10 | 799,55 | 1.974,55 |
| 4 | 2.476,86 | 2.774,10 | 562,60 | 2.211,50 |
| 5 | 0,00 | 2.774,10 | 297,22 | 2.476,88 |

- Ü9: $12.000 = 100.000 \cdot KWF(100.000, 8\%)$

  $$12.000 = 100.000 \cdot i \cdot q^n / (q^n - 1)$$

  $$n = \log(3) / \log(1{,}08) = 14{,}27$$

---

[3] auch: Restwertverteilungsfaktor, Rückwärtsverteilungsfaktor